RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. IV. — (Anno LXXIII)

NAPOLI
S. I. E. M. — STAB. INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MATEM.
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1934

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. IV. — (Anno LXXIII)

Fascicoli 1 a 6 - Gennaio a Giugno 1934 (XII)

NAPOLI

S. I. E. M _ Stabilimento Industrie Editoriali Meridionali

TIP. DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MAT.

Via S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2 - Telef. 24-566

1934 - XII

Pubblicato il 20 Luglio 1934 - XII

RELAZIONE

DEI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

DURANTE L'ANNO 1933

letta nell' adunanza del dì 3 febbraio 1934 (XII)

dal socio segretario **Geremia D'Erasmo**

Nel dare notizia dei lavori compiuti dalla Reale Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli durante il passato anno 1933 limiterò la mia esposizione ad un compendio molto succinto, sia per non abusare della cortese attenzione dei Colleghi, sia per non ripetere cose già dette nei riassunti, che molto opportunamente ora accompagnano la stampa di ciascun lavoro scientifico.

I fascicoli del Rendiconto, pur essendo stati pubblicati con le consuete limitazioni degli ultimi anni, accolsero non meno di venti lavori di soci e di estranei, riguardanti svariati campi delle scienze matematiche e naturali, oltre ai sommari delle memorie stampate negli Atti, ai processi verbali delle adunanze e ai soliti cataloghi di libri, opuscoli e periodici pervenuti in omaggio o in cambio dagli autori e dagli editori.

Di questi lavori, che attestano la continuata attività del nostro Sodalizio, parecchi sono quelli che si riferiscono alle discipline matematiche: a cominciare dalle varie note di meccanica del socio corrispondente Mario Pascal (*Sul moto di una figura deformabile piana di area costante e che rimane affine a sè stessa, Sul centro istantaneo di velocità nulla* e *Sull'accelerazione nel moto di una figura piana di area costante e a deformate affini, Sulla cinematica affine di una figura piana di area costante*) e del prof. Salvatore Di Noi (*Considerazioni geometriche sul moto di un corpo deformabile che si mantiene simile a sè stesso*), fino a quelle del socio Carlo Luigi Ricci (*Le polarità di elasticità longitudinale e trasversale per un sistema complesso spaziale, simmetrico rispetto ad un piano*), dell'ing. Adriano Galli (*Sulle deformazioni pure infinitesime*), del dott. Guido Barba (*Su speciali nuclei, analoghi a quelli di Andreoli-Evans*), della dott. Serra Caracciolo (*Sui polinomi definiti*), della signorina Carbonaro (*Sulle algebre complesse dotate di modulo*) e del prof. J. C. Vignaux, dell'Università di Buenos Aires (*Sulla rappresentazione di funzioni per serie di polinomi*).

Nel campo della Fisica sono da ricordare tre note del socio corrispondente Carrelli *Sull'azione di allargamento di linee spettrali*

per effetto di aumento di densità e *Sull' intensità dell' effetto Raman*; e in quello della Chimica organica un lavoro del prof. COVELLO sopra i *Derivati mercurici del gruppo della purina.*

Di una interessante questione di fisiologia, riguardante il rapporto tra anatossina difterica e veleni ofidici, ha discusso, in due comunicazioni verbali, il socio DIAMARE, che ha presentato pure un lavoro, accolto nel Rendiconto, del dott. Espedito DI LAURO sopra lo stesso argomento.

Al prof. DE FIORE è dovuta una nota di etnologia romana, riflettente *I molluschi marini rinvenuti a Pompei*; e all'ing. PENTA spettano infine una nota di mineralogia *Sul luogo delle sezioni di eguale estinzione* ed uno studio preliminare *Su di una cupola trachifonolitica ed un banco di breccia vulcanica del cratere di Quarto (Campi Flegrei).*

Oltre a queste note e comunicazioni inserite nel Rendiconto, vanno ancora ricordate le memorie accolte negli Atti. Chiuso, con la fine del 1932, il volume XIX di questi, s' è potuta iniziare senza indugio la stampa del volume XX, mercè il generoso aiuto finanziario del benemerito Banco di Napoli, accogliendovi finora sei memorie di geometria, d'idraulica, di zoologia, di fisica terrestre e di fisiologia, che, in ordine cronologico, sono le seguenti: 1) G. NEBBIA, *Sulla distribuzione delle velocità nelle correnti fluide;* 2) S. CHERUBINO, *Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni;* 3) U. PIERANTONI, *Gli organi luminosi e la luminescenza di Octopodoteuthis sicula Ruppel;* 4) G. B. RIZZO, *Misure delle radiazioni penetranti eseguite sul M. Rocciamelone;* 5) P. DEL PEZZO, *Geometria ad h-dimensioni;* 6) V. DIAMARE, *Cordoni cellulari pronefrici e corpuscoli di Stannius dei Teleostei.*

E poichè anche la R. Accademia d'Italia, accogliendo la nostra richiesta, ci ha accordato un contributo finanziario per la ristampa della importante *Mineralogia vesuviana* del compianto consocio Ferruccio ZAMBONINI, noi speriamo di potere entro il nuovo anno — mercè la collaborazione del socio QUERCIGH che ha cortesemente accettato l'incarico di curare la nuova edizione — arricchire la scienza italiana di una monografia di largo interesse, che costituendo la migliore trattazione dei minerali del nostro famoso vulcano, è vivamente desiderata dagli studiosi di tutte le parti del mondo.

Nel 1933 si é chiuso il concorso al premio ZAMBONINI di lire duemila, offerte dalla vedova per onorare degnamente il nome dello scienziato scomparso incoraggiando alla ricerca scientifica i giovani cultori della Chimica e della Mineralogia. Il concorso, al quale parteciparono sette aspiranti, è stato giudicato dall' Accademia, e nel-

l'adunanza solenne del 21 gennaio 1934 furono proclamati vincitori i dottori GALLITELLI Paolo e PARASCANDOLA Antonio.

L'Accademia fu rappresentata al XVI Congresso Geologico Internazionale che ebbe luogo a Washington nel Luglio 1933, e partecipò al XXI Congresso della Società Italiana per il progresso delle Scienze, tenuto a Bari nello scorso Ottobre.

La carica di presidente per il 1933 fu tenuta dal senatore DEL PEZZO, e a quella di vice-presidente per il 1934 venne chiamato il socio Gaetano SCORZA.

Vennero nominati socio ordinario residente il prof. Antonio SIGNORINI e ordinario non residente il prof. Mauro PICONE: entrambi appartenevano da vari anni alla Sezione di Scienze matematiche in qualità di corrispondenti. L'Accademia ha poi eletto socio corrispondente nella medesima Sezione il prof. Giulio ANDREOLI dell'Università di Napoli. Quali soci stranieri nella sezione delle Scienze Naturali sono stati infine nominati il dott. Henry Fairfield OSBORN, presidente del Museo Americano di Storia naturale di New York, il prof. Michael POLANYI, dell'Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie di Berlin-Dahlem, e il prof. Roberto ROBINSON della Università di Oxford.

Questa serie di nomi cari e stimati, con i quali l'Accademia completa le proprie fila preparandosi a continuare nel tempo la gloriosa tradizione di cultura scientifica di cui rappresenta il principale focolaio nell'Italia meridionale, ci conforta nei gravi lutti sofferti. Nel 1933 la morte ci ha strappato due soci.

Nella notte di Capodanno si spegneva fulmineamente il prof. Ermete MARCUCCI, corrispondente nella sezione di Scienze Naturali, da me già ricordato nella relazione dello scorso anno, e del quale il consocio COLOSI ha molto opportunamente rilevata la figura spirituale di uomo profondamente buono, giusto e modesto ed i notevoli meriti scientifici nel campo degli studi biologici.

Il 22 marzo moriva in Torino Enrico D'OVIDIO, anziano fra i i nostri soci ordinari non residenti, che all'altissimo ingegno accoppiava i pregi dell'animo nobile e gentile e che, con la sua attività scientifica e didattica, rivolte di preferenza ai campi dell'algebra e della geometria analitica, non solo lasciò orma imperitura legando il suo nome agli studi sulle metriche proiettive e sulla teoria delle cubiche gobbe, ma esercitò altresì una straordinaria influenza come fondatore di quella scuola, che doveva dare alle Università italiane il maggior numero di docenti nelle discipline geometriche. Gli insigni meriti di studioso, di insegnante e di cittadino dell'eminente scienziato furono degnamente commemorati dal socio SCORZA nell'adunanza del 1. aprile scorso.

E, benchè non figurasse nell'elenco dei nostri soci, é qui per me doveroso ricordare una terza perdita fatta dall' Accademia con la morte di Francesco CONTARINO, già astronomo del R. Osservatorio di Capodimonte e libero docente di Astronomia nella R. Università di Napoli, uomo di grande dottrina e di singolare modestia, di cui il Presidente volle giustamente ricordare anche lo zelo infaticabile portato nel lavoro di riordinamento della nostra Biblioteca.

Inviamo un mesto e reverente saluto alla memoria di tutte queste care figure scomparse; e con la piena fiducia che al nostro antico e glorioso Sodalizio non potrà mancare, da parte delle Autorità preposte al decretato coordinamento degli Enti culturali, il riconoscimento delle grandi benemerenze acquistate in più di un secolo di ininterrotta attività scientifica, rimettiamoci al lavoro con la persuasione che servendo la scienza ed orientando i problemi culturali verso la vita della Nazione, si serve la Patria.

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE PER IL PREMIO FERRUCCIO ZAMBONINI

La Commissiono composta dei soci: Prof. Maria BAKUNIN, S. E. Prof. Francesco GIORDANI e Prof. Emanuele QUERCIGH, si è riunita sotto la presidenza della prof. Maria BAKUNIN ed ha preso visione del bando e dei lavori spediti dai vari concorrenti.

I concorrenti presentatisi risultano i 7 seguenti, disposti in ordine alfabetico:

ANDREATTA Ciro,
BANCHETTI Augusto,
CAROBBI Guido,
FERRARI Adolfo,
GALLITELLI Paolo,
LETI Francesco,
PARASCANDOLA Antonio.

Il prof. CAROBBI Guido, essendo stato informato di essere l' unico professore universitario presentatosi al concorso, ha preferito ritirarsi per non creare ostacoli ai più giovani concorrenti.

La Commissione prende atto e passa a considerare i lavori che presentano gli altri concorrenti, che sono rispettivamente i seguenti:

ANDREATTA Ciro:

1) *Ricerche petrografiche sulla regione di Cima d' Asta;*

2) *Rilevamenti geologici e ricerche petrografiche sulla regione Cevedale-Val d' Ultimo (Alto Adige);*

3) *Nuove ricerche sulla bianchite: bianchite sintetica;*

4) *Analisi strutturale di rocce metamorfiche.*

BANCHETTI Augusto:

1) (in collaboraz. con S. BONATTI) *Ricerche cristallografiche sul cromato e sul molibdato di magnesio pentaidrato;*

2) *Considerazioni e ricerche sull' origine dei giacimenti cinabriferi, in special modo del monte Amiata;*

3) *Ricerche sull' uso di alcuni elettrodi bimetallici nell' acidimetria e potenziometrica.* I. *Comportamento in soluzioni tampone;*

4) *Ricerche id. id.* II. *Comportamento nelle titolazioni.*

FERRARI Adolfo:

1) (in collaboraz. con A. SCHERILLO) *Ricerche sulla struttura cristallina della manganite;*

2) (in collaboraz. con D. GHIRON) *Sopra un' artinite di Hoboken (N. Jersey);*

3) (in collaboraz. con A. SCHERILLO) *Studio cristallografico di alcune sostanze organiche;*

4) (in collaboraz. con C. COLLA) *Ricerche chimiche e cristallografiche sui nitriti complessi.* Nota I;

5) (in collaboraz. con C. COLLA) *Id. id.* Nota II;

6) (in collaboraz. con R. CURTI) *Gli abiti e la struttura cristallina del tartrato acido di potassio;*

7) in collaboraz. con C. COLLA) *Ricerche chimiche e cristallografiche sui cobaltinitriti di ammonio, potassio, rubidio, cesio e tallio.*

GALLITELLI Paolo:

1) *Sulla forma cristallina di alcuni acetilacetonati;*

2) *Contributo alla conoscenza petrografica delle arenarie dell' Appennino Modenese;*

3) *Ricerche sul solfato di calcio semidrato e sull' anidrite solubile.*

LETI Francesco:

1) *Nuovo reattivo per la ricerca del glucosio a freddo;*

2) *Reattivo per la ricerca a freddo del glucosio, metodo facile per ottenerlo;*

3) *Reattivo per la ricerca microchimica dell' acetone;*

4) *Studi sulla carta. La sfaldatura del foglio.*

PARASCANDOLA Antonio:

1) *Sulla non esistenza della Karelinite come specie minerale.*

Risultando che qualche concorrente ha inviato lavori eseguiti in collaborazione, la Commissione stabilisce che se la domanda di partecipazione al concorso è fatta da uno solo degli autori, detti lavori in collaborazione non possono venire presi in considerazione quando in essi non risulti la parte spettante all'opera del collaboratore che si presenta al concorso.

Restano perciò esclusi tutti i lavori presentati dal FERRARI perchè in collaborazione con SCHERILLO, GHIRON, COLLA e CURTI; e del lavoro N. 1 di BONATTI e BANCHETTI si tiene conto, a merito di quest'ultimo, della parte che risulta da lui eseguita.

Per quanto riguarda il merito dei lavori che la Commissione conseguentemente prende in considerazione risulta quanto segue:

Ciro ANDREATTA: porta un contributo alla conoscenza petrografica delle località studiate; accresce le conoscenze sul minerale «bianchite»; applica l'analisi strutturale ad alcune rocce metamorfiche da lui studiate.

Augusto BANCHETTI: studia i critalli di un composto: il cromato di magnesio pentaidrato; espone un'ipotesi sull'origine dei giacimenti cinabriferi del Monte Amiata discutendo e modificando quella di SPIREK in base a proprie osservazioni di laboratorio, senza però portare un contributo positivo al problema; presenta i risultati di alcune ricerche sull'acidimetria potenziometrica con elettrodi bimetallici.

Paolo GALLITELLI: presenta un accurato studio cristallografico sugli acetilacetonati di berillo, di magnesio, di nichelio, di cobalto, di zinco, di alluminio, di cromo, di manganese e ferro, alcuni dei quali sono polimorfi, mettendone in evidenza le relazioni di isomorfismo e di isodimorfismo; porta un buon contributo alla conoscenza petrografica delle arenarie dell'Appennino Modenese; con una lodevole serie di ricerche cristallografiche, ottiche e strutturali sul solfato di calcio semidrato contribuisce notevolmente alla conoscenza di questo composto e ne mette in evidenza le sue relazioni coll'anidrite.

Francesco LETI: propone delle modifiche di scarsa importanza e di dubbio vantaggio a noti metodi di ricerca del glucosio e dell'acetone; presenta degli studi sulla carta che riguardano manipolazioni pratiche del restauratore e conservatore di stampe e manoscritti.

Antonio PARASCANDOLA: chiarisce il problema, finora insoluto, della esistenza della Karelinite, esaminando il materiale del giacimento originario studiato da HERMANN che in base alle proprie esperienze ammise questa nuova specie minerale. Queste nuove ricerche concludono

esaurientemente dimostrando che la Karelinite è una miscela eterogenea e non un composto chimico definito e perciò deve essere eliminata dal novero dei minerali.

La soluzione di questo problema rappresenta un contributo positivo alle conoscenze mineralogiche.

La Commissione, in base alla valutazione dei titoli presentati dai concorrenti, tenendo conto che ai termini precisi del bando di concorso il premio Zambonini si deve considerare essenzialmente come *incoraggiamento* alla ricerca scientifica, ritiene di fare opera strettamente consona allo scopo del concorso stesso dividendo il premio stabilito in due porzioni eguali di mille lire ciascuna e di considerare nei concorrenti non solo i risultati conseguiti nelle ricerche, ma anche le condizioni di laboratorio e di mezzi a loro disposizione nell'eseguirle.

La Commissione ritiene quindi che fra i concorrenti che hanno avuto a loro disposizione laboratori bene attrezzati e comodità di mezzi scientifici, il Dott. Gallitelli Paolo ha conseguito nei lavori presentati i migliori e più importanti risultati e che quindi egli meriti un incoraggiamento;

ritiene poi che il Dott. Parascandola Antonio, il quale, malgrado il pesante lavoro ordinario derivante dal completo rinnovamento edilizio dell'Istituto di Mineralogia di Napoli che si avvia ora appena ad una radicale organizzazione, ha voluto dedicarsi alle ricerche riguardanti la risoluzione del problema dell'esistenza della Karelinite come specie minerale autentica, in condizioni di laboratorio e di mezzi di gran lunga inferiori a quelli degli altri concorrenti ed ha saputo giungere al risultato positivo di dimostrare l'erroneità dell'ammissione di Hermann, meriti pure di venire incoraggiato.

Propone quindi che il Premio Zambonini venga assegnato e diviso in parti eguali ai concorrenti: Gallitelli dott. Paolo e Parascandola dott. Antonio.

M. Bakunin, F. Giordani, E. Quercigh.

Sulle superficie del terzo ordine.

Nota I del dott. **G. Zicari**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1934 - XII)

Sunto. — Scopo di questa Nota e di un'altra successiva è apportare qualche utile complemento alla Nota del Caporali: « *Teoremi sulle superficie del 3° ordine* » inserita nel Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli (1881). In questa prima Nota si determina il numero dei tetraedri coniugati a due superficie cubiche che abbiano uno spigolo in una retta assegnata.

1. Tre punti si dicono *coniugati* rispetto ad una superficie del 3° ordine S, quando due qualunque di essi sono separati armonicamente dalla quadrica polare del terzo; ossia, che è lo stesso, quando ciascuno è situato sul piano polare misto degli altri due. Queste proprietà assoggettano i tre punti ad una sola condizione, che è quella di coniugio tra la superficie data e l'inviluppo di terza classe, formato con i tre punti, condizione che, come si sa, è lineare nei coefficienti della equazione della superficie S e della equazione dell'inviluppo. Una immediata conseguenza di ciò è naturalmente la seguente:

Se tre punti sono coniugati rispetto ad r *superficie del* 3° *ordine, essi sono anche coniugati rispetto a ciascuna superficie del sistema lineare* r-1 *volte infinito da quello determinato.*

2. Un tetraedro dicesi *coniugato* rispetto alla superficie S, quando tre qualunque dei quattro vertici formano un triangolo coniugato alla superficie; oppure quando il piano polare misto di due vertici rispetto a S, contiene i due rimanenti; o anche quando i quattro vertici presi tre a tre danno terne coniugate rispetto alla quadrica polare del quarto rispetto alla superficie S. Per una terna l'essere coniugata alla superficie S, equivale, come si è detto, ad una sola condizione; perciò può dirsi che l'essere un tetraedro coniugato ad una superficie S equivale a quattro condizioni. Segue che il numero dei tetraedri coniugati ad una superficie del 3° ordine è otto volte infinito; rispetto ad un fascio di superficie cubiche è quattro volte infinito, e rispetto ad una rete il detto numero è finito.

3. Si può domandare: quanti sono i tetraedri simultaneamente coniugati a due superficie del 3° ordine S e S' aventi uno spigolo in una retta assegnata? La ricerca si fa in base alle considerazioni che seguono e si trova che tal numero è 49.

4. Per fare ciò premettiamo alcuni lemmi.

Lemma I. *Dati i punti A e B è possibile trovarne altri due C e D, e in un modo solo, così che il tetraedro $ABCD$ risulti coniugato a S ed abbia coniugate rispetto a S' le facce ABC, ABD.*

Infatti, in virtù delle condizioni imposte, la retta $r \equiv CD$ resta determinata come l'intersezione dei due piani polari misti dei punti A, B rispetto ad S ed S'. In secondo luogo la coppia C, D deve appartenere sia all'involuzione segnata su r dalla quadrica polare del punto A rispetto ad S, che all'involuzione sulla stessa r segnata dalla quadrica polare del punto B rispetto ad S; essa quindi è unica ed unico è il tetraedro $ABCD$.

Lemma II. *Quando nel precedente tetraedro $ABCD$, A si mantiene fisso e B si fa scorrere su una retta b qualsiasi, la retta $s \equiv CD$ descrive un regolo.*

Ed invero, se A è fisso, restano determinate le quadriche polari di A rispetto ad S ed S' che denoteremo con Q e Q'. Ora quando il punto B scorre sulla retta b, il piano polare di B rispetto a Q descrive un fascio e così descrive un fascio il piano polare di B rispetto a Q'; ma i due fasci di piani sono riferiti biunivocamente ai punti della retta b e perciò sono proiettivi tra loro. La intersezione di due piani omologhi, per quanto si è detto è una retta del tipo $s \equiv CD$, dunque le rette CD descrivono un regolo.

Lemma III. *Se un regolo ed un fascio di piani sono riferiti proiettivamente, il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi è una cubica sghemba.*

La dimostrazione è immediata.

Lemma IV. *Se una punteggiata r ed un fascio di quadriche sono riferiti proiettivamente, i piani polari dei punti di quella rispetto alle quadriche corrispondenti del fascio, costituiscono un cono di seconda classe.*

Per la dimostrazione basta far vedere che assegnato comunque nello spazio un punto P, per questo passano due piani dello inviluppo. I piani polari del punto P rispetto alle quadriche del fascio dato formano un fascio di piani proiettivo alla punteggiata r; ora assegnato sulla r un punto A, è fissata la quadrica corrispondente Q e perciò se il piano π (polare del punto P rispetto a Q) passa per A, il piano α polare di A rispetto a Q passerà per P e sarà uno dei piani richiesti. In generale ciò non accadrà ed il piano π segherà la r in un punto A' $(\neq A)$ che assumeremo sulla r come corrispondente di A; inversamente al punto A' corrisponderà un solo punto A perchè assegnato A' resta fissato il piano π, resta fissata la quadrica Q e quindi il punto A. Segue che i piani dell'inviluppo passanti per P sono due e l'inviluppo è di seconda classe.

Lemma V. *Se un regolo ed un cono di seconda classe sono riferiti proiettivamente, il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi è una curva sghemba del quarto ordine.*

La dimostrazione è immediata.

5. Ciò posto, nelle ipotesi del secondo lemma, cerchiamo l'ordine della curva sghemba, luogo delle coppie C, D.

Assegniamo pertanto una direttrice d della quadrica generata dal regolo; questa taglierà le rette $s, s', s'', \ldots\ldots$ del regolo nei punti $P, P', P'' \ldots\ldots$ L'ordine del luogo, di cui si va in cerca, non è altro che il numero dei punti di esso giacenti in un piano generico dello spazio. Se questo piano lo assumiamo, per esempio, formato dalla direttrice d e dalla retta s del regolo, i punti richiesti staranno sulle rette d ed s; ma su s stanno solo due punti del luogo, perciò i rimanenti staranno su d. Ciò significa che occorre cercare il numero delle coppie di punti C, D per le quali accade che uno di essi capiti sulla direttrice d. Se P fosse uno di questi, dovrebbe esistere sulla retta s un altro punto P_1 che insieme a P, formerebbe una coppia di punti coniugati rispetto alla quadrica polare di A rispetto a S; inoltre la stessa coppia P, P_1 dovrebbe risultare coniugata alla quadrica polare di B rispetto ad S: ciò in generale non è, perciò al punto P se ne associano sulla retta s altri due P_1, P_2 dei quali il primo è coniugato a P rispetto alla quadrica polare di A, il secondo è coniugato a P rispetto alla quadrica polare di B. Così sulla retta s' passante per P', si associano a P' i due punti $P_1{}^1, P_2{}^1$, sulla retta s'' passante per P'', a questo altro punto si associano P_1'', P_2'' e così di seguito. I punti $P_1, P_1', P_1'' \ldots$ da una parte, e i punti $P_2, P_2', P_2'' \ldots$ dall'altra, costituiscono due curve p_1, p_2 le quali giacciono entrambe sulla quadrica generata dal regolo.

Andiamo a trovare separatamente gli ordini delle due curve.

Ordine della curva p_1. Osserviamo che il punto P_1 è la intersezione della retta s col piano polare del punto P rispetto alla quadrica polare del punto A rispetto ad S; il punto P_1' è l'intersezione della retta s' col piano polare del punto P' rispetto alla quadrica polare del punto A rispetto ad S e così di seguito. Sicchè i piani polari di cui si parla sono in corrispondenza biunivoca con i punti della direttrice d e formano fascio; ma i punti della d sono anche in corrispondenza biunivoca con le rette del regolo, perciò il fascio di piani ed il regolo sono riferiti proiettivamente. In virtù del lemma III, il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi (del regolo e del fascio di piani) è una cubica sghemba, quindi la p_1 è del 3° ordine ed è tagliata dal piano sd in tre punti di cui uno è sulla retta s e gli altri due sono sulla direttrice d.

Ordine della curva p_2. Osserviamo che il punto P_2 è l'interse-

zione della retta s col piano polare di P rispetto alla quadrica polare di B rispetto ad S; il punto P_2' e l'intersezione della retta s' col piano polare di P' rispetto alla quadrica polare di B' rispetto ad S e così di seguito. Ma le quadriche polari dei punti $B, B', \dots$ formano un fascio riferito biunivocamente ai punti della direttrice d, in quanto che ad ogni punto B della retta b, corrisponde una retta s del regolo che taglia la direttrice d in un punto P. Segue, per il quarto lemma, che i piani polari dei punti della d rispetto alle corrispondenti quadriche del fascio, inviluppano un cono di seconda classe; però i punti della d sono anch'essi riferiti con corrispondenza biunivoca alle rette del regolo, quindi il cono di seconda classe ed il regolo sono riferiti proiettivamente tra loro e perciò il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi è una quartica sghemba. Si conclude che la curva p_2 è del quarto ordine. Essa giace, al pari della p_1, sulla quadrica generata dal regolo ed è tagliata dal piano sd in quattro punti di cui, uno è sulla s e gli altri tre sono sulla direttrice d. Dopo ciò è chiaro che il numero delle coppie che si richiedono sono tante quanti sono i punti comuni alle due curve p_1, p_2.

Ora tale numero per un noto teorema dello Chasles è 5, quindi accade 5 volte che un punto P_1 coincide con un punto P_2 ed allora segue che di coppie C, D aventi un punto C sulla direttrice d ne esistono solo 5. Ma allora il piano sd taglia il luogo dei punti C e D in 5 punti sulla direttrice d, in due punti sulla retta s, cioè il luogo in esame è una curva del *settimo ordine*, che indicheremo con c_7.

6. Procediamo ora, imponendo al tetraedro $ABCD$ (ricavato nel modo noto) di avere ancora una terza faccia ACD coniugata alla superficie S', e cerchiamo di vedere quanti sono, fra gli ∞^1 del lemma II, i tetraedri siffatti, cioè quante sono le coppie C, D che si possono estrarre dalla curva c_7 e che riescono coniugate rispetto alla quadrica polare di A rispetto ad S'.

Se il piano polare misto di A e C rispetto ad S' contenesse il punto D, la coppia C, D sarebbe una di quelle richieste; in generale ciò non accade ed il detto piano taglia la curva c_7 in certi sette punti $C_1', C_2', \dots C_7'$ che si assumono come corrispondenti del punto C sulla curva. Inversamente ad un punto C_i' $(i = 1, 2, \dots 7)$ corrispondono sette punti C, intersezioni della curva c_7 con il piano polare misto dei punti C_i', A rispetto ad S'. La corrispondenza, essendo a valenza zero, ammetterà *quattordici* coincidenze le quali forniscono, evidentemente, sette coppie di punti C, D che insieme alle sette coppie che vi si collegano $AB_1, AB_2, \dots AB_7$, dànno che sette è il numero dei tetraedri richiesti.

7. Resta ora a vedere quanti sono, fra gli ∞^1 del lemma II, i tetraedri con la faccia BCD coniugata rispetto ad S'.

Se fissato sulla retta b il punto B, la corrispondente coppia C, D forma con esso una terna coniugata rispetto ad S', vorrà dire che il piano polare misto, dei punti C, D rispetto ad S', passa per B; ma ciò in generale non accade ed il detto piano taglia la retta b in un certo punto B_0 che si assume come corrispondente del punto B sulla retta b. Bisogna cercare di questa corrispondenza il secondo indice. Teniamo allora B_0 fermo e consideriamo la sua quadrica polare rispetto ad S'; allora di coppie C, D coniugate rispetto a questa quadrica, per quanto si è detto precedentemente ve ne sono sette, perciò al punto B_0 corrispondono sette punti B. La corrispondenza è pertanto una $(7, 1)$, ammette otto coincidenze e quindi il numero dei tetraedri è otto.

8. Si trae profitto dalle cose dette per cercare in definitiva il numero dei tetraedri coniugati ad S e S', che abbiano uno spigolo in una retta assegnata v.

A tal fine fissiamo sulla retta v un punto A e facciamo scorrere il punto B sulla stessa retta v; sappiamo che esistono sulla v, sette punti $B_1, B_2, \ldots B_7$ i quali insieme ad A ed alle corrispondenti coppie CD forniscono sette tetraedri coniugati ad S e che rispetto ad S' hanno coniugate tutte le facce, ad eccezione di quella del tipo BCD. Viceversa tenuto fisso uno dei punti B_i $(i = 1, 2 \ldots 7)$ facciamo scorrere il punto A sulla retta v; sempre in virtù delle deduzioni precedenti si ha che al punto B_i corrispondono otto punti A, che forniscono analogamente otto tetraedri coniugati ad S e che rispetto ad S' hanno coniugate tutte le facce meno la ACD. Si ottiene così una corrispondenza $(8, 7)$. Ora le coppie di punti A, B giacenti sulla retta v che ci occorrono, sono tutte e sole le coppie involutorie di questa corrispondenza $(8, 7)$; dunque il loro numero, per una formula ben nota, è 49. Si conclude che i tetraedri coniugati a due superficie S e S' del 3.° ordine, che abbiano due vertici su una retta assegnata dello spazio, sono in numero di 49.

Sulla superficie del terzo ordine

Nota II del dott. **G. Zicari**

(Adunanza del dì 20 gennaio 1934 - XII)

Sunto. — In questa Nota si determina l' ordine della superficie riempita dai vertici degli ∞^2 tetraedri coniugati simultaneamente rispetto ad una quadrica e ad una superficie cubica.

1. I tetraedri coniugati sia alla superficie cubica S che ad una quadrica Q sono in numero doppiamente infinito.

Infatti l'essere un tetraedro coniugato rispetto ad S importa, come si sa, quattro condizioni; l'essere lo stesso tetraedro coniugato rispetto a Q importa sei condizioni e quindi l'essere il tetraedro coniugato ad entrambe importa dieci condizioni; ma i tetraedri dello spazio sono ∞^{12}, dunque quelli che riescono coniugati ad S e Q sono ∞^2.

A questo punto il Caporali osserva che il luogo dei vertici dei tetraedri, simultaneamente coniugati ad una superficie S e ad una quadrica Q, costituiscono una superficie di cui però non determina l'ordine; dice solamente, ed è ovvio, che la superficie è covariante alla sestica intersezione di Q ed S. Occupiamoci pertanto di quest'altra ricerca per la quale sono necessarie alcune considerazioni che andiamo ad esporre.

2. *Dato un punto A dello spazio, esiste un solo tetraedro ABCD che ha un vertice in A, è coniugato alla quadrica Q ed è tale che i tre triangoli ABC, ABD, ACD siano coniugati alla superficie S.*

E infatti perchè il tetraedro $ABCD$ soddisfaccia alle condizioni volute occorre e basta che le tre coppie BC, BD, CD siano situate nel piano α polare del punto A rispetto a Q e riescano coniugate, tanto rispetto alla quadrica Q, quanto rispetto alla quadrica polare di A rispetto ad S; cioè che il triangolo BCD riesca coniugato ad entrambe le coniche secondo cui α taglia Q e la quadrica polare di A rispetto ad S. Ma di triangoli coniugati simultaneamente a due coniche ne esiste uno solo, e quindi uno solo è il tetraedro che corrisponde alle condizioni volute.

3. Nelle ipotesi precedenti facciamo vedere che:

Se il vertice A scorre su una retta r dello spazio, la corrispondente terna BCD descrive una curva dell' ottavo ordine.

Si è visto che la terna BCD è contenuta nel piano polare di A rispetto alla quadrica Q; ora variando il punto A sulla retta r, le singole terne BCD giacciono nei rispettivi piani polari rispetto a Q,

formanti un fascio il cui asse r' è la polare della retta r. In ogni piano del fascio è contenuta una sola delle terne BCD, ma può darsi che uno dei tre punti venga a trovarsi su più di un piano del fascio ossia sulla retta r'. Andiamo dunque a determinare quanti di tali punti si troveranno sulla r'.

Supponiamo, per questo, che della terna BCD, relativa a un certo punto A di r, uno dei punti, per es., B cada su r'; allora per la retta CD dovranno passare i piani polari di A e B rispetto a Q e il piano polare misto di A e B rispetto ad S; e poichè quei primi due piani passano rispettivamente per r' ed r la retta CD dovrà oppoggiarsi ad r' in un punto B_1 e ad r in un punto A_1. Osservisi inoltre che A ed A_1 riesciranno coniugati rispetto a Q e B, B_1 riesciranno coniugati tanto rispetto a Q quanto rispetto alla quadrica polare di A rispetto ad S; di guisa che BB_1 sarà la coppia comune alle due involuzioni di punti coniugati che sulla r' determinano la quadrica Q e la quadrica polare di A rispetto ad S.

Ciò posto, detto X un punto di r si dica YZ la coppia comune alle due involuzioni di punti coniugati determinate su r' da Q e dalla quadrica polare di X rispetto ad S, e siano s_1 ed s_2 le rette passanti per Z ed Y, rispettivamente, secondo cui il piano polare di X rispetto a Q è tagliato dai piani polari misti di X ed Y o X e Z rispetto ad S. Se delle rette s_1 ed s_2 una, per es., s_1 si appoggiasse ad r, il piano polare di Y rispetto a Q che passa per r e Z verrebbe a contenere s_1 e X sarebbe una delle posizioni di A su r che andiamo cercando.

Segue che, se n è l'ordine della rigata Γ generata dalle rette s_1 ed s_2 al variare di X su r, n è il numero dei punti richiesti che cadono su r'.

Per calcolare n si badi, in primo luogo, che Γ ha per direttrice semplice r' e che ogni piano per r' la seca in due generatrici. Ma v'è da soggiungere che r' è anche generatrice doppia di Γ, giacchè per due posizioni di X su r avviene che delle corrispondenti rette s_1 ed s_2 una viene a coincidere con r'.

E infatti dire, ad es., che per il punto X la retta s_1, per es., coincide con r' è quanto dire che il piano polare di Y rispetto alla quadrica polare di X rispetto ad S viene a passare per r', indi per Y; cioè che la quadrica polare di X rispetto ad S tocca r' in Y.

Poichè l'osservazione è invertibile e poichè due sono i punti di r le cui quadriche polari rispetto ad S tocchino r', perchè codeste quadriche costituiscono un fascio, si conclude che r' è generatrice doppia di Γ, e che dunque $n = 5$.

Segue che il luogo della terna BCD al variare di A su r è una curva dell'ordine 8 con una cinque-secante in r'.

4. Ci domandiamo ora: *quale è il genere della curva sghemba dell' 8.° ordine luogo dei punti BCD?*

Per questo andiamo a vedere anzitutto quante sono le nostre terne BCD per ciascuna delle quali accade che due dei punti che la costituiscono vengano a coincidere.

Rammentando che la terna BCD è stata ottenuta come triangolo diagonale del quadrangolo formato dai punti comuni a due certe coniche, e che il triangolo diagonale di un tal quadrangolo non può avere due vertici coincidenti se non a patto che due dei vertici del quadrangolo vengano a coincidere, la ricerca che ci siamo posti equivale a quest' altra: cercare quanti sono i piani per r' per i quali accade che le due coniche, relative ad essi nel senso che risulta da quanto siamo venuti dicendo, risultino tangenti. Si consideri l'insieme dei punti X sulla retta r ed il corrispondente fascio dei loro piani polari rispetto alla quadrica Q di asse r'; poi il fascio delle quadriche polari degli stessi punti X rispetto alla superficie S. Risultando i due fasci riferiti biunivocamente ai punti della retta r, essi sono riferiti proiettivamente tra loro, e però il luogo delle intersezioni degli elementi omologhi è una superficie S_3' del terzo oraine. La sezione della quadrica Q con la superficie S_3' è una sestica la quale è segata dai piani del fascio r' secondo i gruppi di una g_4^1, per il fatto che la quadrica Q ha in comune con la r' due punti che appartengono alla sestica. Ma è noto che la sestica in discorso è del genere 4, quindi la g_4^1, per una nota formula di Riemann, avrà 14 punti doppi.

Esistono pertanto 14 quadrangoli degeneri, del tipo indicato, ed in corrispondenza 14 terne BCD in ognuna delle quali, due dei punti che la costituiscono sono riuniti tn uno solo. Sia ora x il genere della curva eell' 8.° ordine; segandola col fascio di piani r', per quanto si è detto precedentemente, ne verrà fuori una g_3^1 che avrà 14 punti doppi, quindi valendoci di nuovo della formula del Riemann, si trova $x = 5$.

Sicchè il genere della curva dell' 8.° ordine è uguale a 5.

5. Servendoci delle ricerche fatte finora, possiamo finalmente trovare l' ordine della superficie, luogo dei vertici dei tetraedri simultaneamente coniugati alla quadrica Q ed alla superficie S.

Riprendiamo la retta r e la curva sghemba c_8, luogo delle terne BCD. Dicemmo che per ogni punto A di r esiste una sola terna BCD che con A completa un tetraedro che è coniugato alla quadrica Q ed ha tre facce, esclusa quella opposta ad A, coniugate alla superficie S.

Cosicchè occorre ora trovare il numero delle terne BCD giacenti sulla c_8, che risultano coniugate ad S. Se BCD è una tal terna, dovrà accadere che il piano polare misto di C e D, rispetto ad S, passi per il punto B; prendiamo allora a caso sulla c_8 il punto B e diamo di

conseguenza i due punti C, D che con B formano una terna del tipo solito. Data l'arbitrarietà della posizione di B sulla c_8, il piano polare misto di C, D rispetto ad S, non passerà per B e taglierà la curva in certi otto punti $B', B'' B''', \ldots B^{VIII}$. Quel che si è detto per B si può ripetere per ogni altro punto della curva e perciò si può formare una corrispondenza tra i punti B ed i punti $B', B'', \ldots B^{VIII}$.

Tale corrispondenza, a valenza zero, è di indici (16,8), cioè ad un punto B della curva corrispondono otto punti $B', B'', \ldots B^{VIII}$ e ciò risulta da quanto si è detto; e viceversa ad uno dei punti $B', B'', \ldots B^{VIII}$, corrispondono sedici punti B. Questa seconda parte si dimostra osservando che, cercare quanti punti B corrispondano ad un B', equivale a trovare quante coppie di punti si possono estrarre dalle terne BCD, il cui piano polare misto rispetto ad S passi per B'. Perciò è necessario risolvere il seguente problema:

Determinare la classe dello inviluppo formato dai piani polari misti delle coppie di punti, che si possono formare con le terne BCD, rispetto alla superficie S.

Per questo sia H un punto dello spazio e Q' la quadrica polare di H rispetto ad S.

La classe dell' inviluppo in discorso sarà il numero delle coppie estratte dalle ∞^1 terne BCD che riescono coniugate rispetto a Q', cioè il numero delle coppie comuni alle corrispondenze simmetriche, T ed U che si ottengono sulla c_8, dicendo omologhi, in T, due punti che facciano parte di una stessa delle ∞^1 terne BCD e, in U, due punti che riescano coniugati rispetto a Q'. Ora T è una (2,2) di valenza 1, U è una (8,8) di valenza 0, dunque il numero delle loro coppie comuni è 16 e tale è la classe del nostro inviluppo.

Ciò posto ritorniamo alla corrispondenza che ci interessa.

Se il punto H, considerato nel ragionamento ora fatto, si fa coincidere con B', si conclude che a B' corrispondono sedici punti B, la corrispondenza è cioè, come si è detto, una (16,8); ma è a valenza zero, e perciò ammette 24 coincidenze. Se $\overline{B}$ è una di questa, tali dovranno essere anche $\overline{C}$, $\overline{D}$ che con $\overline{B}$ formano una terna coniugata alla superficie S, essedo questa volta invertibile l'ufficiò dei punti $\overline{BCD}$. Ma allora le terne richieste sono otto. Otto sono perciò i tetraedri coniugati alla quadrica Q ed alla superficie S, che hanno un vertice sulla retta r (che fu fissata ad arbitrio) e quindi:

Il luogo dei vertici degli ∞^2 tetraedri coniugati rispetto a Q ed S è una superficie di ordine 8.

Sui sistemi chiusi di funzioni ortogonali ed un gruppo ad un parametro.

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 Febbraio 1934-XII)

Sunto. — L'A. pone in luce la relazione esistente fra sistemi ortogonali di funzioni periodiche e la teoria dei gruppi ad un parametro. Considera uno di tali gruppi (che ha interpretazioni sia nello spazio di Hilbert, che nell'olospazio di Minetti). Pone in rilievo una certa curva dello spazio di Hilbert, e si ricollega a certe ricerche del Levi-Civita relative a funzioni dotate di un teorema di addizione.

1. Ci proponiamo di porre in luce un caratteristico legame fra i sistemi di funzioni ortogonali, i gruppi del Lie ad un parametro ed altre ricerche (ad es. quella del Levi-Civita riguardante le funzioni che ammettono un teorema di addizione).

Consideriamo pertanto un sistema chiuso di funzioni ortogonali definite, per semplicità, nell'intervallo (0,1) pel quale esse sono appunto ortogonali e normalizzate: $[\varphi] = \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r, \ldots$.

Tale sistema noi lo completeremo *fuori* dell'intervallo (0, 1) aggiungendo come definizione la periodicità a periodo 1, e completando opportunamente la definizione stessa in uno degli estremi. Le φ saranno sommabili e di quadrato sommabile (in qualsiasi intervallo finito); e quindi si considereranno equivalenti due funzioni che differiscano, al più, su un insieme di misura nulla.

È ovvio che, in tale ipotesi, le funzioni $\varphi_r(x+y)$ sono — per qualsiasi prefissato valore di y — anche esse periodiche, a periodo 1; sommabili e di quadrato sommabile in qualsiasi intervallo finito.

2. Una prima proprietà del sistema $[\varphi_r(x+y)]$ è che esse funzioni formano a lor volta un sistema ortogonale, normalizzato e chiuso nell'intervallo (0, 1), risultando altresì periodiche a periodo 1.

Ed in effetti, se supponiamo per brevità y positivo e minore di 1 l'integrale

$$\int_0^1 \varphi_r(\xi+y)\varphi_s(\xi+y)d\xi$$

si può scrivere

$$\int_y^{1+y} \varphi_r(\xi)\varphi_s(\xi)d\xi = \int_0^1 \varphi_r(\xi)\varphi_s(\xi)d\xi + \int_1^{1+y} \varphi_r(\xi)\varphi_s(\xi)d\xi - \int_0^y \varphi_r(\xi)\varphi_s(\xi)d\xi .$$

dalla quale si vede che i due ultimi integrali, causa la periodicitá delle funzioni, sono eguali e quindi si elidono.

Resta dunque

$$\int_0^1 \varphi_r(\xi + y)\varphi_s(\xi + y)d\xi = \int_0^1 \varphi_r(\xi)\varphi_s(\xi)d\xi = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases}$$

cioè il sistema è evidentemente ortogonale e normalizzato.

Che sia chiuso, si vede subito, scrivendo la condizione di chiusura del sistema originario, servendosi di una arbitraria funzione $f(x)$ definita in $(0, 1)$; completando questa come funzione periodica fuori dell' intervallo; ed osservando che $f(x + y)$ soddisfa a tutte le condizioni (a noi occorrenti) cui soddisfa $f(x)$, e che

$$\int_0^1 f(\xi + y)\varphi_r(\xi + y)d\xi = \int_0^1 f(\xi)\varphi_r(\xi) .$$

in modo analogo al precedente.

Ciò mostra che:

I. I coefficienti di Fourier di $f(x + y)$ rispetto al sistema $[\varphi_r(x + y)]$ sono gli stessi che quelli di $f(x)$ rispetto a $[\varphi_r(x)]$;

II. I coefficienti di una $f(x)$ rispetto a $[\varphi_r(x+y)]$ sono quelli di $f(x-y)$ rispetto a $[\varphi_r(x)]$.

Questa ovvia proprietà sarà richiamata fra poco.

3. Per la stessa definizione di $\varphi_n(x + y)$, questa soddisfa a tutte le condizioni di sviluppabilità in serie di Fourier rispetto a $[\varphi_r(x)]$

Avremo dunque:

$$\varphi_n(x + y) = \sum_r a_{n,r}(y)\varphi_r(x) \tag{1}$$

ove:

$$a_{n,r}(y) = \int_0^1 \varphi_n(\xi + y)\varphi_r(\xi)d\xi .$$

Sarà dunque anche

$$\varphi_n(x+y+z)=\sum_r \alpha_{n,r}(z)\varphi_r(x+y)=\sum \alpha_{n,r}(y+z)\varphi_r(x)$$

ed, a meno di una quistione di convergenza, dovendo coincidere le due espressioni,

$$\varphi_n(x+y+z)=\sum_r \alpha_{n,s}(z)\sum_s \alpha_{sr}(y)\varphi_r(x)=\sum \alpha_{n,r}(y+z)\varphi_r(x)$$

risulterà

$$\alpha_{n,r}(x+z)=\sum_s \alpha_{ns}(y)\alpha_{sr}(z)=\sum_s \alpha_{ns}(z)\alpha_{sr}(y)$$

Se dunque indichiamo con $A(y)$ la matrice infinita $\| \alpha_{n,r}(y) \|$ (che è evidentemente a periodo unitario) tale matrice soddisfa all'equazione funzionale

$$A(y+z)=A(y)\cdot A(z)=A(z)\cdot A(y). \tag{2}$$

In quanto alle funzioni α, osserviamo che — quasi dappertutto —

$$\lim_{h\to 0} \varphi_n(x+h)=\varphi_n(x)$$

Dunque, (quasi dappertutto — ed ometteremo di ripeterlo) $\alpha_{nr}(h)$ è infinitesimo con h, se $n \neq r$; tende ad 1 se $n=r$.

In altri termini

$$A(y)=I+E(y) \tag{3}$$

ove la matrice E risulta formata dagli elementi $\varepsilon_{n,r}=\alpha_{n,r}$ $(n\neq r)$; $\varepsilon_{rr}=\alpha_{rr}-1$.

Simbolicamente si può porre

$$A(y)=e^{\Theta(y)}$$

ottenendosi per Θ l'equazione funzionale

$$\Theta(y+z)=\Theta(y)+\Theta(z), \tag{4}$$

Si osservi che indicando con ε_{nr} l'infinitesimo $\varepsilon_{nr}(h)$ per h tendente a zero, le (1) assumono la forma compatta

$$\Delta\varphi_r(x)=\varphi_n(x+h)-\varphi(x)=\sum_r \varepsilon_{n.r}\cdot\varphi_r(x)$$

sicchè tali formule possono considerarsi come le trasformazioni infinitesimali (*) corrispondenti al gruppo ad un parametro caratterizzato ad $x \to x + h$, allorchè si supponga operare sulle funzioni $\varphi_r(x)$.

D'altro canto, risulterà anche

$$A(y) = A\left(\frac{y}{n}\right)^n = \left\{1 + E\left(\frac{y}{n}\right)\right\}^n$$

sicchè siamo precisamente di fronte ad un processo di limite analogo a quello che da $1 + z$ attraverso $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ conduce ad e^z.

4. Esaminiamo ora ciò che avviene nello spazio Hilbertiano H (relativo alle funzioni sommabili e di quadrato sommabile in $(0, 1)$, al variare di y.

Per quanto precede, ognuno dei sistemi $[\varphi_r(x + y)]$, per ogni y scelto, formerà in tale spazio un sistema normalizzato di assi ortogonali $K(y)$. Al variare di y tale sistema di assi percorre una semplice infinità di posizioni, ritornando alla posizione iniziale allorchè y aumenta di 1.

Il passaggio dall'una all'altra posizione si effettua mediante le matrici $A(z)$ in modo che

$$K(y + z) = A(z) \cdot K(y) = A(y) K(z).$$

Quindi, come si è detto, siamo in presenza, in H, di un gruppo Γ di trasformazioni ad un parametro nel senso di LIE (alquanto generalizzato se, non essendo le φ derivabili, non vi sono simboli di trasformazione infinitesima nel senso ordinario).

Durante lo spostamento un osservatore fisso collegato al sistema originario $K(o)$ vede spostare un punto di H (cioè una funzione $f(x)$ che conservi le stesse coordinate invariabili rispetto agli assi mobili $K(y)$, in modo da percorrere i punti $f(x - y)$; e reciprocamente l'altro vedrà percorrere i punti $f(x + y)$. In ambo i casi una curva dello spazio H viene percorsa dal punto mobile (o fisso) rispetto all'osservatore fisso (o mobile).

Per dare esempio di come tutto ciò avvènga (al quale esempio del resto si riporta immediatamente il caso generale), consideriamo consideriamo il classico sistema di FOURIER:

$$1\,;\ \mathrm{sen}\,(\pi x)\,;\ \cos\,(\pi x)\,;\ \mathrm{sen}\,(2\pi x)\,;\ \cos\,(2\pi x)\,;\ \ldots \qquad \equiv [\Psi_r(x)]$$

(*) Si potrebbe anche dire che le φ_r soddisfano ad un sistema di equarenziali, *in senso lato*, a coefficienti costanti, di ordine infinito.

Ovviamente, per le formule di addizione, la matrice $A^{(o)}$ risulta in questo caso giustaponendo lungo la diagonale principale le matrici

$$1\,,\quad \left\| \begin{matrix} \cos(\pi y) & \operatorname{sen}(\pi y) \\ -\operatorname{sen}(\pi y) & \cos(\pi y) \end{matrix} \right\| \,,\quad \left\| \begin{matrix} \cos(2\pi y) & \operatorname{sen}(2\pi y) \\ -\operatorname{sen}(2\pi y) & \cos(2\pi y) \end{matrix} \right\| \,,\, \ldots .$$

e riempendo con zeri.

Quindi, il movimento apparente, al variare di y, rispetto agli assi originari di un punto-funzione rigidamente collegato agli assi variabili avviene in modo tale che la prima coordinata resti invariata, la proiezione del punto sulle coppie successive di piani fissati ordinatamente dalle altre coordinate, descriva *sempre* un cerchio in ciascuno di questi piani, ma in modo tale che ad ogni arco nel primo corrisponda l' arco doppio nel secondo, triplo nel terzo e così via.

Tale curva Σ, traiettoria di un punto di H rispetto a Γ si può pensare come limite di curve toriche nello spazio a $2n$ dimensioni, opportunamente avvolgendo la curva stessa attorno ad un asse, poi attorno ad un cerchio etc. etc.

D' altro canto, qualsiasi altro sistema $[\varphi]$ di funzioni ortogonali e normalizzate si ottiene da quello $[\Psi]$ di Fourier mediante una trasformazione ortogonale Ω, dunque le matrici A generiche sono legate allo $A^{(o)}$ dalla

$$A(y) = \Omega A^{(o)}(y)\Omega^{-1}$$

In tal modo, per la trasformazione $x \to x + y$, si crea nello spazio H tutto un sistema di curve chiuse, percorse ciclicamente al variare di y; ognuna di esse è una traiettoria generica del gruppo Γ, ed è ottenuta da quella fondamentale Σ a mezzo di una arbitraria trasformazione ortogonale Ω.

5. Ritornando alla (1)

$$\varphi_n(x + y) = \sum_r \alpha_{nr}(y)\varphi_r(y)$$

se si sviluppano le α secondo le φ, e si indicano con c_{nrs} i rispettivi coefficienti di Fourier, si trova (se qui si prescinde da quistioni di convergenza)

$$\varphi_n(x + y) = \sum_{r.s} c_{nrs}\varphi_r(y)\varphi_s(x).$$

ove le costanti c_{nrs} soddisfano alle relazioni

$$c_{nrs} = c_{nsr}$$

e sono date da

$$c_{nrs} = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_n(\xi + \eta)\varphi_r(\xi)\varphi_s(\eta)d\xi d\eta$$

6. Mostriamo infine come alla stessa equazione funzionale (2) si perviene allorche si esamina il problema trattato dal Levi Civita di determinare le funzioni $\omega(x)$ che ammettono un teorema di addizione

$$\omega(x + y) = \sum^n f_r(y) g_r(x)$$

Si osservi che fissando n generici valori, arbitrari ma costanti, per x, si ricaveranno genericamente le α_r come combinazioni lineari a coefficienti costanti di $\omega(x_1 + y), \ldots . \omega(x_n + y)$, e reciprocamente; e così anche per le β. In altri termini tanto le f che le g sono generalmente combinazioni lineari di $\omega(x + k_r)$, e reciprocamente.

Quindi se la ω ammette quel teorema di addizione, teorema analogo ammetteranno sia le f che g. Partendo dalla funzione f, fissando un intervallo del resto arbitrario, e completandole fuori di questo intervallo come funzioni periodiche, indicate con f', sarà possibile passare da queste ad un sistema finito di funzioni $[\varphi]$ periodiche, ortogonali e normalizzate nello stesso intervallo. Ciò si otterrà a mezzo d'una sostituzione T trasformatrice nella quale sono nulli tutti gli elementi al disopra della diagonale principale e gli altri sono costanti.

Invece di considerare lo spazio H basta considerare lo spazio n-dimensionale costituito dalle combinazioni lineari delle φ, e ripetere lo stèsso ragionamento.

Se ora noi formiamo la matrice A_f, relativa alle funzioni f', e quella A_φ relativa alle funzioni φ, varrà la

$$A_f(y) = TA_\varphi(y)T^{-1}$$

e quindi anche

$$A_f(y + z) = TA_\varphi(y + z)T^{-1} = TA_\varphi(y)A_\varphi(z)T^{-1} = A_f(y)A_f(z) = A_f(z)A_f(y)$$

Dunque, la relazione fondamentale (2) vale anche per il caso finito dedotto da funzioni ammettenti il teorema di addizione anzidetto.

Ma, ricordiamo che le f' sono state dedotte dalle f riproducendo queste periodicamente, a partire da un intervallo *arbitrario*, con periodo eguale ad esso. Quindi, le relazioni stesse varranno anche, senza

che occorra passare per l'intermediario delle funzioni periodiche, per tale classe.

Un esempio chiarirà subito ciò. Consideriamo la funzione x^n che ovviamente ammette il teorema d'addizione del Levi-Civita; si vede subito che valgono le relazioni

$$\varphi_r(x+y) = \varphi_r(x)\varphi_0(y) + \binom{r}{1}\varphi_{r-1}(x)\varphi_1(y) + \dots + \varphi_0(x)\varphi_r(y) \qquad \{\varphi_r(\xi) = \xi^r\}$$

Dunque, le $\alpha_{rs}(y)$ sono nulle per $s>r$; e date da $\binom{r}{r-s}\varphi_{r-s}(y)$ per $s \leq r$;

La matrice $A(y)$ è dunque

$$A(y) \equiv \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 & 0 \\ y^2 & 2y & 1 & 0 \\ \hline y^n & \binom{n}{1}y^{n-1} & \binom{n}{2}y^{n-2} & 1 \end{array} \right\|$$

e si vede che, in effetti, una facile verifica dà:

$$A(y+z) = A(y) \cdot A(z).$$

Il procedimento ora indicato permette dunque di trattare il problema della ricerca di funzioni aventi un teorema d'addizione del Levi-Civita indipendentemente da ipotesi di derivabilità.

7. Da tutto quanto precede risulta dunque:

I. *Le funzioni φ di un sistema ortogonale chiuso possiedono un teorema di addizione, del tipo di Levi Civita, ma d'ordine infinito, allorchè si pensano completate come funzioni periodiche:*

$$\varphi_r(x+y) = \sum \alpha_{rs}(y)\varphi_s(y)$$

II. *Le funzioni α_{rs}, a lor volta, posseggono un teorema di addizione dello stesso tipo, ma ridotto a forma canonica:*

$$\alpha_{rs}(y+z) = \sum_t \alpha_{rt}(y)\alpha_{ts}(z) = \sum_t \alpha_{rt}(z)\alpha_{ts}(y)$$

cioè

$$A(y+z) \equiv A(y) \cdot A(z) = A(z)A(y) \quad ; \quad A(\xi) = \| \alpha_{rs}(\xi) \|.$$

III. *Il sistema $[\varphi_r(x+y)]$, per ogni y, forma a sua volta sistema ortogonale e chiuso rispetto allo stesso intervallo originario.*

IV. *Il passaggio $x \to x + y$, definisce nello spazio di Hilbert* (*) *un gruppo continuo di trasformazioni ad un parametro, le cui traiettorie sono tutte ottenute per trasformazioni ortogonali della curva fondamentale* Σ, *propria di* H.

V. *Il risultato relativo alle funzioni* $\alpha_{rs}(y)$ *ed alle matrici* $A(y)$ *continua a valere se si tratta di funzioni formanti un sistema finito che nel suo complesso ammetta un teorema d' addizione del Levi Civita: cioè*

$$g_r(x+y) = \sum_s \alpha_{r,s}(y) g_s(y) \qquad r = 1 \ldots n$$

anche se non si tratti più di funzioni periodiche.

Proprietà fondamentale della deformazione pura infinitesima di un corpo continuo.

Nota dell' Ing. **Guido Del Vecchio**

(Adunanza del dì 3 febbraio 1934 - XII)

Sunto. — Siano A e B due punti dell' intorno di un punto generico M del corpo continuo, detta γ'_{ab} la componente secondo la direzione $M\,B$ dello spostamento del punto A riferito alla lunghezza del segmento $M\,A$ e γ'_{be} l' analogo spostamento nella direzione MA del punto B, si dimostra che $\gamma'_{ab} = \gamma'_{ba}$. Successivamente si deducono da tale teorema le altre proprietà della deformazione e pertanto lo si ritiene fondamentale per lo studio in esame.

1. — È noto che se con u, v, w (funzioni delle coordinate, continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni di un corpo continuo) si indicano le componenti dello spostamento che un punto generico M del corpo stesso, di coordinate x, y, z, subisce per effetto della deformazione, le analoghe componenti in un punto vicinissimo A (dell' intorno di M) di coordinate $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$, sono date (assimilando ad infinitesimi le quantità piccolissime ed ammettendo nelle derivate prime delle u, v, w proprietà analoghe a quelle già ammesse

(*) Così come lo definisce nell' olospazio del Minetti.

più sopra nelle funzioni stesse) da: [1])

$$\begin{vmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x}\xi + \frac{\partial u}{\partial y}\eta + \frac{\partial u}{\partial z}\zeta \\ v + \frac{\partial v}{\partial x}\xi + \frac{\partial v}{\partial y}\eta + \frac{\partial v}{\partial z}\zeta \\ w + \frac{\partial w}{\partial x}\xi + \frac{\partial w}{\partial y}\eta + \frac{\partial w}{\partial z}\zeta \end{vmatrix}$$

Tali espressioni si trasformano immediatamente nelle altre:

$$\begin{array}{l} u + q\zeta - r\eta + \varepsilon_x\xi + \gamma'_{xy}\eta + \gamma'_{xz}\zeta \\ v + r\xi - p\zeta + \gamma'_{yx}\xi + \varepsilon_y\eta + \gamma'_{yz}\zeta \\ w + p\eta - q\xi + \gamma'_{zx}\xi + \gamma'_{zy}\eta + \varepsilon_z\zeta \end{array}$$

quando si pone:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zy}\ ^{2)} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = p \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \gamma'_{zx} = \gamma'_{xz} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = q \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \gamma'_{xy} = \gamma'_{yx} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = r \end{array}$$

---

[1]) Cfr. ad es: C. L. Ricci - *Scienza delle Costruzioni* - Vol. I.; R. Marcolongo - *Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici* - Cap. III.

[2]) Ordinariamente si prendono in esame soltanto le espressioni:

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{yz} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{xy}$$

tenendo presente che esse rappresentano gli incrementi (negativi) che gli angoli formati rispettivamente dagli assi y e z, z ed x, x ed y subiscono per effetto della deformazione. Con tale posizione la deformazione relativa scorrimento mutuo) di due direzioni viene ad essere considerata nel suo insieme, trascurando così implicitamente l' esame dei singoli contributi che la deformazione pura di ciascuno di tali elementi porta alla deformazione relativa di essi.

Poichè nella considerazione della deformazione pura anche le espressioni $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$.... hanno un significato (che come si può facilmente vedere è precisamente analogo a quello delle ε_x....) e poichè, come si vedrà, partendo da tali espressioni si possono mettere agevolmente in evidenza i con-

Prescindendo, come si usa, dai primi tre termini di tali espressioni, che rappresentano la parte rigida dello spostamento, esaminiamo la parte di esso dovuta alla deformazione propriamente detta o « deformazione pura », caratterizzata dalle tre componenti:

$$\delta_x = \varepsilon_x \xi + \gamma'_{xy} \eta + \gamma'_{xz} \zeta$$
$$\delta_y = \gamma'_{yx} \xi + \varepsilon_y \eta + \gamma'_{yz} \zeta$$
$$\delta_z = \gamma'_{zx} \xi + \gamma'_{zy} \eta + \varepsilon_z \zeta$$

le quali, se ci riferiamo ad un elemento di lunghezza unitaria del segmento *MA* (dividendo cioè tutto per la lunghezza l del segmento stesso) possono anche scriversi:

$$\begin{aligned} a_x &= \varepsilon_x \alpha_x + \gamma'_{xy} \alpha_y + \gamma'_{xz} \alpha_z \\ a_y &= \gamma'_{yx} \alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \gamma'_{yz} \alpha_z \\ a_z &= \gamma'_{zx} \alpha_x + \gamma'_{zy} \alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z \end{aligned} \qquad (1)$$

quando con $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ si indicano i coseni direttori della direzione *MA*, e con a_x, a_y, a_z i rapporti $\frac{\delta_x}{l}, \frac{\delta_y}{l}, \frac{\delta_z}{l}$ (che s' identifidano naturalmente con le $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ per un segmento di lunghezza unitaria).

2. — Facendo coincidere la direzione *MA* con l'asse delle x ($\alpha_x = 1$, $\alpha_y = \alpha_z = 0$) le (1) ci danno:

$$a_x = \varepsilon_x \qquad a_y = \gamma'_{yx} \qquad a_z = \gamma'_{zx}$$

dalle quali risulta che le $\varepsilon_x, \gamma'_{yx}, \gamma'_{zx}$ sono i rapporti fra le componenti (secondo i tre assi coordinati) dello spostamento dell' estremo di un segmento, che parte dall' origine ed è orientato secondo l' asse delle x, e la lunghezza del segmento stesso.

Facendo successivamente coincidere la direzione *MA* con gli assi y e z si trovano analoghi significati per le altre ε_x.... e γ'_{yz}....

Tenendo presente che per effetto della deformazione pura che qui si considera, l' altro estremo del segmento rimane fisso nell' origine degli assi, si vede che tutte le suddette grandezze hanno il carattere di veri e propri coefficienti di deformazione, cioè deformazioni

---

tributi di cui sopra, nella presente esposizione si è ritenuto più opportuno porre: $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \gamma'_{yz}$.... Ciò tenuto anche presente che lo scorrimento mutuo di due direzioni, qualora occorra, può sempre ricavarsi dalle rotazioni assolute delle direzioni stesse.

riferite all' unità di lunghezza. Esse si potrebbero chiamare perciò « componenti speciali di deformazione » o meglio « componenti speciali di dilatazione » se si vuole precisare anche il segno della deformazione.[1]) Tra tali componenti si distinguerebbero come longitudinali le $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ e come trasversali le $\gamma'_{yz}, \gamma'_{zx}, \gamma'_{xy}$, mentre che le a_x, a_y, a_z si potrebbero designare col nome di « componenti ortogonali di dilatazione ».

3. — Tenendo presenti le (1) la *dilatazione* [2]) complessiva A (sempre riferita all' unità di lunghezza) di un segmento di coseni direttori $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ risulta dalla:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = (\varepsilon_x \alpha_x + \gamma'_{xy} \alpha_y + \gamma'_{xz} \alpha_z)^2 + \\ + (\gamma'_{yx} \alpha_x + \varepsilon_y \alpha_y + \gamma'_{yz} \alpha_z)^2 + (\gamma'_{zx} \alpha_x + \gamma'_{zy} \alpha_y + \varepsilon_z \alpha_z)^2 \qquad (2)$$

mèntre che la componente di tale *dilatazione* complessiva, misurata nella direzione stessa del sgmento MA, cioè la proiezione di essa deformazione sul segmento, è data da:

$$\varepsilon_a = a_x \alpha_x + a_y \alpha_y + a_z \alpha_z = \varepsilon_x \alpha_x^2 + \varepsilon_y \alpha_y^2 + \varepsilon_z \alpha_z^2 + \\ 2\gamma'_{yz} \alpha_y \alpha_z + 2\gamma'_{zx} \alpha_z \alpha_x + 2\gamma'_{xy} \alpha_x \alpha_y \qquad (3)$$

e quella misurata in un' altra direzione generica MB risuta espressa da:

$$\gamma'_{ab} = a_x \beta_x + a_y \beta_y + a_z \beta_z = \varepsilon_x \alpha_x \beta_x + \varepsilon_y \alpha_y \beta_y + \varepsilon_z \alpha_z \beta_z + \\ + \gamma'_{yz}(\alpha_y \beta_z + \alpha_z \beta_y) + \gamma'_{zx}(\alpha_z \beta_x + \alpha_x \beta_z) + \gamma'_{xy}(\alpha_x \beta_y + \alpha_y \beta_x) \qquad (4)$$

Alla stessa espressione si giunge ovviamente per la γ'_{ba} cioè per la componente della direzione MA della *dilatazione* di un segmento

---

[1]) Ordinariamente alle $\varepsilon_x \ldots\ldots \gamma_{yz} \ldots\ldots$ si dà il nome generico di componenti della deformazione, ma, tenendo conto che nella presente esposizione risulta che anche le $a_x \ldots\ldots$ sono delle componenti di deformazione, e ricordando il nuovo valore in questa assunto per le $\gamma'_{yz} \ldots\ldots$ oltre che il segno ritenuto come positivo per la deformazione (dilatazione), è apparso più opportuno adottare denominazioni diverse per le $\varepsilon_x \ldots\ldots \gamma'_{yz} \ldots\ldots$ e per le $a_x \ldots\ldots$ Una tale distinzione è del resto perfettamente analoga a quella già in uso per le corrispondenti espressioni dell' analisi delle tensioni interne d'un corpo continuo.

[2]) Per quanto si è già detto nella nota precedente, la parola « dilatazione » viene qui usata per indicare lo spostamento relativo di due punti, riferito alla lunghezza del segmento che li congiunge, anche se in genere esso non è diretto nella direzione stessa del segmento in cui si verifica, così come nello studio delle sollecitazioni interne s'indica come tensione la sollecitazione unitaria positiva anche se essa non è diretta parallelamente alla normale all' elemento su cui si esercita.

orientato secondo *MB*. Si può quindi affermare che:

$$\gamma'_{ab} = \gamma'_{ba} \qquad (5)$$

Per brevità la ε_a e la γ'_{ab} potrebbero anche denominarsi rispettivamente: « componente longitudinale della *dilatazione* di un dato elemento » e « componente di *dilatazione* mutua di due elementi dati ».

4. — La (5) dà luogo al seguente teorema: « Nella deformazione pura dell'intorno del punto *M* la componente secondo la direzione *MB* della *dilatazione* di un segmento *MA* è uguale alla componente della direzione *MA* della *dilatazione* del segmento *MB* ». [1])

Esso fa riscontro nello studio della deformazione a quello dimostrato dal CAUCHY per le pressioni interne, che va sotto il nome di teorema o principio di reciprocità, e si potrebbe per analogia indicare come teorema di reciprocità per la deformazione pura infinitesima.

Il teorema stesso inoltre presenta il vantaggio di riunire sinteticamente le altre proprietà della deformazione pura infinitesima, che da esso si deducono in maniera affatto immediata.

La proprietà in esso enunciata ed alcune conseguenze di essa dedotte nel paragr. seguente *a)* e *b)* sembra che non vengano rilevate in quelle trattazioni che prescindono dallo studio delle omografie vettoriali [5]).

5. — *a)* Innanzi tutto, come caso particolare, per direzioni *MA* ed *MB* fra loro ortogonali, tenendo presente che in tal caso γ'_{ab} e γ'_{ba} rappresentano, a meno d'infinitesimi di ordine superiore, anche le componenti nel piano *MAB* delle rotazioni che subiscono le dilatazioni suddette, si ha che: « per effetto della deformazione pura due segmenti ortogonali qualunque *MA* ed *MB* uscenti da *M* subiscono intorno ad *M* rotazioni che hanno nel piano *MAB* componenti di grandezza eguale e di segno contrario: »

---

[1]) Nello studio della deformazione condotto con i metodi dell'analisi vettoriale si dimostra che l'omografia che dai vettori uscenti da *M* fa passare agli spostamenti che ai loro estremi imprime la deformazione pura, è una speciale omografia detta « dilatazione » (caratterizzata dall'avere il vettore nullo).

Il teorema testè dimostrato ci esprime per via esclusivamente scalare una proprietà già contenuta nel fatto che la omografia vettoriale che rappresenta la deformazione pura è una « dilatazione ».

La dimostrazione non vettoriale da noi data in questa nota, oltre alla successiva deduzione delle proprietà della deformazione pura dalla (5) assunta come fondamentale, può presentare qualche interesse quando per ragioni didattiche non risulti conveniente o possibile premettere alla trattazione della teoria dell'elasticità quella delle omografie vettoriali.

b) Nel caso poi che per un elemento lineare orientato secondo una direzione MA la *dilatazione* complessiva risulti nulla, si annullano in conseguenza tutte le componenti di essa (in qualsiasi direzione). Per la proprietà sopra enunciata si deduce quindi che la *dilatazione* complessiva relativa ad un elemento comunque orientato deve avere componente nulla nella direzione data MA, cioè deve giacere sempre nel piano ad essa normale. Si può dire allora che la distribuzione della deformazione si riduce a due dimensioni.

Quando la *dilatazione* complessiva si annulla invece per gli elementi orientati secondo due direzioni distinte la *dilatazione* complessiva di un elemento lineare qualunque deve avere componente nulla secondo entrambe tali direzioni e quindi risulta ortogonale al piano da esse individuato. La distribuzione della deformazione si riduce allora ad una sola direzione.

Quando, infine, la *dilatazione* complessiva si annulla per tre direzioni non complanari la deformazione complessiva di un elemento qualunque, dovendo avere componente nulla secondo tali direzioni, risulta identicamente nulla.

c) Si consideri, infine, la *dilatazione* complessiva di direzione MA', che si verifica sopra un elemento lineare MA, ed i piani α' ed α passanti per M e rispettivamente ortogonali a tali direzioni. Poichè la componente della *dilatazione* del segmento MA secondo una qualunque direzione del piano α' è sempre nulla, ne consegue per la proprietà enunciata, che le *dilatazioni* complessive relative agli elementi contenuti nel piano α', hanno componente nulla secondo la direzione MA, cioè risultano tutte contenute nel piano α normale a tale direzione.

Se si esamina ora la corrispondenza che viene a stabilirsi tra le direzioni MA negli elementi lineari nell'intorno di M ed i piani α perpendicolari alle dilatazioni complessive che tali elementi subiscono si vede che ogni qualvolta ad una retta MA corrisponde un piano α' a tutte le rette del piano α' corrispondono tutti i piani formanti fascio intorno ad MA. Ciòbasta per affermare che: « nell'intorno di M le direzioni degli elementi lineari ed i piani perpendicolari alle *dilatazioni* complessive che tali elementi subiscono si corrispondono in una reciprocità involutoria, cioè in una polarità π della stella M' » e quindi dedurre le altre proprietà ben note della deformazione pura infinitesima.

Una corrispondenza perfettamente analoga si deduce similmente tra le direzioni MA' delle *dilatazioni* complessive ed i piani perpendicolari alle direzioni che tali *dilatazioni* subiscono. Si può quindi aggiungere che: « le direzioni delle dilatazioni ed i piani perpendicolari alle direzioni che tali dilatazioni subiscono si corrispondono in un'altra polarità π' nella stella M ».

Sulla composizione chimica di un diopside cilestrino della eruzione vesuviana del 1906.

Nota della Dott. **Silvia Restaino**

(Adunanza del dì 3 febbraio 1934 - XII)

Sunto. — Si è realizzata l'analisi completa di un diopside, lievemente cuprifero, piuttosto raro nei blocchi del Monte Somma. La sua composizione si avvicina a quella di un diopside puro. Presenta un certo interesse il rinvenimento di piccole quantità di rame, manganese e alcali.

Come è noto, durante la grande eruzione vesuviana cominciata il 6 aprile 1906, oltre ai numerosi blocchi ricchi di minerali pneumatolitici di neoformazione, furono proiettati dal Vulcano anche parecchi di quei tipici blocchi calcarei metamorfosati che si rinvengono al Monte Somma.

Un interessante blocchetto di questo tipo, del peso di circa 2 kg. fu raccolto dalle guide nel maggio del 1917 sull'orlo Nord del cratere, spezzato in numerosi frammenti, fu venduto a vari Istituti Scientifici.

L'esame di uno di questi frammenti rivela che si tratta di uno dei caratteristici blocchi calcarei metamorfosati, il quale nella parte superficiale, e lungo alcune fenditure interne, presenta numerose lamelle di biotite, nonchè cristalli e crosticine di una augite verdastra di tipo fassaitico. Esso risulta a prima vista interessante per la parte interna che si presenta costituita da una massa cristallina di un minerale di un bel colore cilestrino chiaro.

Questo minerale fu subito riconosciuto dal prof. F. Zambonini, come una varietà di diopside lievemente cuprifero, piuttosto rara nei blocchi del Monte Somma, e per questo motivo egli volle affidarmene lo studio.

Una di tali varietà era stata descritta ed analizzata nel 1883 dal Freda. (1)

Nel commercio, però, il diopside cilestrino raccolto nel 1917 passò con vari altri nomi, tra i quali quello di åkermanite.

Questa differente identificazione si potrebbe spiegare con l'equi-

---

(1) G. Freda. Rendiconto R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, 1883, pag. 249.

voco favorito dalla somiglianza di aspetto delle masserelle di diopside cuprifero con quella di åkermanite, ed alla poca differenza dei pesi specifici tra queste due specie minerali, ma la diversità della durezza e dei caratteri ottici e cristallografici rende poco verosimile questa ipotesi; molto più logico è invece il supporre che nel blocco originale coesistessero i due minerali, come coesistevano in quelli esaminati dal FREDA e poi dallo ZAMBONINI (1), e che i vari frammenti in cui esso fu suddiviso potessero contenerne uno solo, come si verifica in quello messo a mia disposizione.

Le prove di durezza eseguite per confronto, quantunque rese un po' laboriose dalla piccolezza dei cristallini, e le osservazioni al microscopio, anch' esse ostacolate dall' imperfezione degli individui minutissimi, a contorno accidentato ed associati irregolarmente, escludono trattarsi di åkermanite, ma per portare un contributo alla conoscenza di questo prodotto vesuviano, e per togliere ogni equivoco sulla sua natura, ho creduto opportuno eseguire un' analisi quantitativa completa del minerale cilestrino puro, tanto più che esso era assai facilmente separabile dalla massa eterogenea.

Si può affermare che il materiale preparato per l' analisi era di grande purezza. Per le determinazioni quantitative furono seguiti i soliti metodi: ferro e manganese furono dosati colorimetricamente: data la piccola quantità del ferro, non si è proceduto alla determinazione separata del ferro ferroso e di quello ferrico. Per il rame si usò il metodo di SPACU, già adoperato utilmente molte volte in questo Istituto.

I risultati ottenuti sono riportati nella colonna I, mentre nella colonna II, sono riportati i valori teorici corrispondenti al composto puro $CaMgSi_2O_6$.

	I	II
SiO_2	52,84	55,48
Al_2O_3	0,53	—
Fe_2O_3	0,09	—
CaO	27,22	25,90
MgO	18,61	18,62
MnO	0,028	—
CuO	0,025	—
K_2O	0,11	—
Na_2O	0,35	—
TiO_2	ass.	—
	99,80	100,00

(1) F. ZAMBONINI. *Mineralogia Vesuviana*, 1909, pag. 256.

Come si vede, il diopside cilestrino, da me analizzato, si avvicina alla composizione teorica $MgCa\ (SiO_3)_2$ del diopside puro, ma presenta una quantità di biossido di silicio notevolmente inferiore a quella richiesta dalla formula ed invece contiene una quantità maggiore di calcio.

La composizione in mole per 100 risulta:

SiO_2	47,82
Al_2O_3	0,30
RO	51,88
	100,00

Nel diagramma triangolare delle composizioni, i cui vertici corrispondono a 100 % di SiO_2, 100 % di RO e 100 % di R_2O_3, questa analisi ha il suo punto rappresentativo in vicinanza, ma al di sotto, del punto corrispondente a $RSiO_3$ (1).

Viene a far parte di quel numero molto ristretto di analisi, che nel diagramma giacciono a destra della linea che unisce i due punti corrispondenti a $RSiO_3$ ed a $RO.R_2O_3$, cioè nell' area del triangolo individuato dai punti rappresentanti le composizioni: $RO.RSiO_3$ ed ROR_2O_3.

La presenza di quantità apprezzabili di rame è molto rara nel diopside ed in generale nei pirosseni. Quello studiato dal Freda, che presenta perfetta analogia paragenetica e di giacimento col mio, risulta assai più cuprifero di questo (e la determinazione si può accettare con sicurezza, perchè fatta a parte su circa 2 g. di minerale) ed inoltre si differenzia notevolmente per il maggiore contenuto in ferro e le conseguenti minori percentuali di calcio e di magnesio, come appare dal confronto dei dati analitici qui sotto riportati:

	Freda		Restaino
SiO_2	52,73		52,84
Al_2O_3	1,06		0,53
FeO	4,22	F_2O_3	0,09
CaO	24,18		27,22
MgO	17,80		18,61
CuO	0,94		0,025
MnO	—		0,028
K_2O	—		0,11
Na_2O	—		0,35
	100,93		99,80

(1) Cfr. F. Zambonini. *Osservazioni sulla composizione chimica di alcuni minerali.* Atti R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli, s· 2ª, vol. XVI, 1914.

Il diopside giallo vesuviano, analizzato da Vom Rath [1]), conteneva ancora minori quantità di calcio ($CaO = 23{,}40$ %) di quello cuprifero di Freda e meno ferro ($FeO = 2{,}30$ %).

Il manganese da me riscontrato e non rinvenuto nè da Vom Rath, nè da Freda nei loro diopsidi, non è raro nei pirosseni vesuviani in cui fu messo in evidenza per la prima volta da Casoria [2]), in quantità notevoli (0,14, 0,28, 1,15 %).

Gli alcali non sono rari nei diopsidi e nei pirosseni in generale, e se spesso non figurano nelle vecchie analisi, ciò si deve in molti casi alla trascurata ricerca dei medesimi. Non è improbabile che tanto Vom Rath che Freda abbiano omessa tale ricerca, quantunque non siano espliciti a questo riguardo.

Istituto di Chimica Generale della R. Università di Napoli, Febbraio 1934-XII

---

[1]) G. vom Rath. Pogg. Ann., 158, 1876, pag. 412.

[2]) E. Casoria. Annali R. Scuola Sup. di Agricoltura, Portici 1904.

Sulla definizione di certi indici, relativi a caratteri di omogamia, in problemi statistici.

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 10 febbraio 1934 - XII)

Sunto. — L' A. parte da alcune ricerche del Benini, relative all' attrazione nel caso di statistiche di coppie omogame ed eterogame, divise con criteri dicotomici. Estende tali ricerche, introducendo indici atti anche nel caso di non dicotomia. Ne mostra l'interpretazione teorica e la formazione pratica.

1. In moltissime quistioni di statistica, sia metodologica che applicata, si presenta la necessità di considerare, in un complesso di coppie formate con due elementi (ciascuno variabile in un suo gruppo), indici atti a caratterizzare l' omogamia o l' eterogamia. Il Benini si è già occupato della quistione (a me recentemente prospettata da alcune ricerche statistiche dei Dr. G. De Meo e Dr. D. Miani, dirette dal collega Prof. L. Galvani) e strettissime sono le connessioni colle sue ricerche.

Con maggior precisione, si considerino tutti gli elementi primi A' delle coppie, (in numero di A) come possedenti una modalità di un certo carattere K', rispetto alla quale modalità gli A stessi risultano ordinati in classi; si considerino tutti i secondi elementi — A'' — delle coppie come possedenti un' altra certa modalità di un altro carattere K'', *) si ponga in corrispondenza biunivoca ogni modalità del primo carattere con una del secondo, allora si diranno coppie « *omogame* » quelle per cui gli elementi A' ed A'' hanno rispettivamente modalità del primo e del secondo carattere corrispondentisi; e coppie eterogame le altre. Occorre definire degli indici.

Esempio: coppie di sposi, distribuite per età, chiamando omogame quelle di cui gli sposi appartengono allo stesso gruppo di età; oppure per età corrispondentisi in media nel matrimonio.

(*) Si suppone, implicitamente, che i numeri delle classi di distribuzione delle modalità di K' e di K'' siano eguali; ed eguali ad n; e che ogni elemento appartenga sempre e solo ad una coppia.

Per brevità, supponiamo — in questa Nota — che i caratteri K e K' sieno gli stessi; (il procedimento resta invariato negli altri casi) e che la corrispondenza fra i due caratteri sia fissata dall'eguaglianza della modalità (nel nostro esempio, stessa età).

Le coppie vengono allora ad essere distribuite in un quadro — matrice quadrata d'ordine n — nella quale l'elemento di posto (r, s) cioè α_{rs} dà il numero di coppie di cui il primo elemento ha la modalità m_r, il secondo la m_s.

Complessivamente vi saranno A'_r coppie di cui il primo elemento ha modalità m_r; ed A''_s elementi di cui il secondo ha modalità m_s, ove:

$$A'_r = \sum_s \alpha_{rs} \quad ; \quad A''_s = \sum_r \alpha_{rs}$$

essendo poi

$$A' = \sum_r A_r = \sum_s A''_s = \sum \alpha_{rs}$$

Il quadro delle α_{rs}, sarà indicato con (α).

2. Per confrontare, dal punto di vista statistico, due di tali quadri, due successivi stadi si presentano naturali.

Anzitutto, si può paragonare la (α) ad una distribuzione «indifferente» (A^*) nella quale gli elementi A' ed A'' si distribuiscono *egualmente* nelle diverse classi di modalità; allora le $A_r'^*$ risultano tutte eguali ad $\frac{A}{n}$; e così pure le $A_r''^*$. Allora (A^*) risulta dato da un quadro di cui *tutti* gli elementi a_{rs}^* hanno il valore di $\frac{A}{n^2}$.

Si può poi pensare ad una distribuzione «*casuale*» $(\bar{A})$; in essa le A_r', A_s'' conservano il valore che hanno nel quadro (α); soltanto esse si combinano a caso, sicchè il quadro $(\bar{A})$ risulta formato da righe *tutte* proporzionali alle A_s'', da colonne *tutte* proporzionali alle A_r', cioè

$$\bar{a}_{rs} = \frac{A_r' A_s''}{A}$$

Orbene si possono definire certi caratteri i quali ci diano, statisticamente, le differenze fra $(\bar{A})$ ed (A^*) come indici di *irregolarità* j; e le differenze fra (A) ed $(\bar{A})$ come indici di *sfasamento*, σ; mentre la differenza fra (A) ed (A^*), ci darà l'indice di omogamia ω, che risulterà somma di j e di σ.

3. A tal uopo, deduciamo da (A) una tabella di secondo ordine, mediante una divisione dicotomica; precisamente aggruppiamo assie_

me tutte le modalità inferiori o eguali alla m_r, ed assieme tutte quelle superiori ad m_r.

Si avranno, in corrispondenza delle tabelle A, altre tabelle B (omettiamo di segnare l'indice r, per ora) a due indici; tali che

$$(\beta) \equiv \| \beta_{uv} \| ; (\overline{\beta}) = \| \overline{\beta}_{uv} \| ; (\beta^*) = \| \beta_{uv}^* \| \qquad u, v = 1, 2;$$

esse saranno ottenute dalle corrispondenti tabelle (A), $(\overline{A})$, (A^*), sommando assieme tutte le frequenze delle coppie; e precisamente

β_{11} come somma delle α nelle quali i due indici *non* superano r;
β_{12} » » » α » » il primo » » » r
β_{21} » » » α » » il secondo » » » r
β_{22} » » » α » » i due indici superano r.

e così per le altre

E rispettivamente B_1', B_2', B_1'', B_2'' si ottengono nello stesso modo dalle A', A''.

È facile vedere che posto $\frac{r}{n} = \lambda$; $\frac{n-r}{n} = 1 - \lambda = \mu$, sarà:

$$(B^*) = \begin{vmatrix} A\lambda^2 & A\lambda\mu \\ A\lambda\mu & A\mu^2 \end{vmatrix} ; \; B_1^{*\prime} = B_1^{*\prime\prime} = A\lambda ; \; B_2^{*\prime} = B_2^{*\prime\prime} = A\mu .$$

$$(\overline{B}) = \begin{vmatrix} \overline{b}_{11} & \overline{b}_{12} \\ \overline{b}_{21} & \overline{b}_{22} \end{vmatrix} ; \; \overline{B}_1' = \sum_1^r B_\rho' \; ; \; \overline{B}_2' = \sum_{r+1}^n B_\rho \text{ etc.}$$

Se adesso osserviamo che $\overline{B}_1'$ si può porre sotto la forma $A\lambda + h$ (con h positivo o negativo), $\overline{B}_2'$ sotto la $A\mu - h$ ed analogamente $\overline{B}_1'' = A\lambda + k$, $\overline{B}_2'' = A\mu - k$; si avrà

$$\overline{b}_{11} = A\lambda^2 + (h+k)\lambda + \frac{hk}{A} \; ; \; \overline{b}_{12} = A\lambda\mu + (h\mu - k\lambda) - \frac{hk}{A}$$

$$\overline{b}_{21} = A\lambda\mu + (k\mu - h\lambda) - \frac{hk}{A} \; ; \; \overline{b}_{22} = A\mu^2 - (h+k)\mu + \frac{hk}{A}$$

Ora, il prodotto $\frac{4hk}{A^2}$ si può assumere come indice di irregolarità della $(\overline{B})$; esso risulta dato del prodotto dei due scarti della media di distribuzione, rappresentata da (B^*), ed è facile verificare che la differenza delle due diagonali (cioè differenza fra coppie omogame e coppie eterogame) diviso per il numero A, è dato da

$$\frac{\overline{D}}{A} = \frac{\overline{b}_{11} + \overline{b}_{22} - \overline{b}_{12} - \overline{b}_{22}}{A} = (\alpha - \beta)^2 + \frac{4hk}{A^2} = j + (\alpha - \beta)^2$$

Si osserva facilmente che $(\alpha - \beta)^2$ è dato dalla differenza delle diagonali di B^*, divisa per A; cioè da $\frac{D^*}{A}$

Quindi risulta

$$j = \frac{\overline{D} - D^*}{A}$$

È bene chiarire in modo esplicito che nel caso di divisione dicotamica (il più perpiscuo considerato dal BENINI — cfr. SAVORGNAN: La misura dell' endogamia e dell' esogamia — Atti del Com. Ital. per lo Studio dei problemi della popolaz., pag. 16-17, Roma 1931) l'indice j ha una immediata relazione di eguaglianza con l'indice di attrazione del BENINI.

Infatti, costruita la tabella ridotta (a gruppi aperti, del BENINI); la sua « casuale » è precisamente una tabella « indifferente » quindi con semplicissimi passaggi algebrici si vede che l'*indice* σ, *di sfasamento della tabella ridotta è precisamente eguale all' indice di attrazione del* BENINI (calcolato sulla detta tabella ridotta delle combinazioni libere) mentre l'indice di irregolarità risulta zero.

Se si costruisce poi la tabella ridotta dei gruppi chiusi, si vede che per essa vi è coincidenza con la sua causale; mentre non coincide con la uniforme. In tal caso l'indice di irregolarità j non risulta nullo (e vi è eguaglianza con quello primitivo) mentre risulta nullo quello di sfasamento.

È evidente poi che la tabella originaria risulta dalla somma delle tabelle ridotte relative a gruppi aperti e gruppi chiusi; e che quindi, in corrispondenza si sommano gl' indici: e si avrà $j = o$; $\sigma' = \sigma$; $j'' = j$; $\sigma'' = o$; cioè infine $\omega = \sigma' + j''$.

Qui, come in seguito, il denominatore rappresenta la « massima » irregolarità, ottenuta portando *tutte* le coppie in una sola casella, e dando 0 come valore delle altre frequenze.

Similmente, è agevole verificare che $(\beta) = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{vmatrix}$ si può anche scrivere.

$$\begin{vmatrix} \overline{b}_{11} + p & \overline{b}_{12} - p \\ \overline{b}_{21} - p & \overline{b}_{22} + p \end{vmatrix}$$

Sicchè essa è ottenuta dalla somma (nel senso delle matrici) di $\overline{B}$ con $\begin{vmatrix} p & -p \\ -p & p \end{vmatrix}$; e risulta inoltre (ove la differenza delle diagonali si indichi con Δ)

$$\Delta = D + 4p.$$

Pertanto, l'indice σ, potrà essere definito da $\frac{\Delta - \overline{D}}{A}$.

Infine, l'indice ω risultato dato da $j + \sigma$, cioè da

$$\frac{\Delta - D^*}{A}$$

Come si è detto, tali indici (che ovviamente *non* superano l'unità in valore assoluto) dipendono dal numero r scelto; dunque al variare di r, si avranno rispettivamente le tre serie di indici

$$\begin{cases} j_0 \, , \, j_1 \, , \ldots . \, j_n \\ \sigma_0 \, , \, \sigma_1 \, , \ldots . \, \sigma_n \\ \omega_0 \, , \, \omega_1 \, , \ldots . \, \omega_n \end{cases}$$

i quali daranno tre «*profili*» (nel senso del NICEFORO) diversi della collettività di coppie considerate; e precisamente il primo dà l'andamento per orizzontali e verticali; il secondo l'andamento per diagonale principale e secondaria riferita alla distribuzione casuale; ed infine il terzo il complessivo andamento.

La positività o negatività di j ci dirà che le distribuzioni delle A' e delle A'' sono concordi; quella di σ se prevale omogamia o eterogamia della distribuzione rilevata rispetto a quella casuale.

5. La formazione di tali indici viene dunque ad essere collegata alle seguenti operazioni:

I. Formazione di quadri dicotomici rispettivamente dal quadro «*rilevato*», da quello «*casuale*» da quello «*indifferente*».

II. Operazione D per ognuno di essi quadri dicotomici, consistente nel formare la differenza fra I e II diagonale (fra coppie omogame e coppie eterogame) nella dicotomia formata.

III. Rapportare i D così ottenuti al numero totale A di casi esaminati (che da la distribuzione più dissimetrica e sfasata).

IV. Formazione delle differenze fra questi rapporti; la differenza fra rilevato e indifferente dà l'indice di omogamia; fra rilevato e causale quello di sfasamento, fra casuale ed indifferente quello di irregolarità. Gli ultimi due, sommati, danno il primo.

V. Formazione dei «profili» ottenuti variando la scelta del punto di dicotomia.

Infine, se (riferendoci soltanto a divisioni dicotomiche) chiamiamo con C la tabella ridotta dei gruppi aperti, nel senso del BENINI, e con K quella residua (relativa ai gruppi chiusi) si vede subito che

$$(A) = (C) + (K)$$

$$\overline{C} = C^* \; : \; K = \overline{K}$$

Inoltre

$$j(C) = o \; ; \; \sigma(K) = o \, .$$

Ed infine vale, come si dedurrebbe da una facile verifica:

$$A \cdot \omega(A) = C \cdot \sigma(C) + Kj(K).$$

Cioè:

$$\omega(A) = \frac{C\sigma(C) + K \cdot j(K)}{C + K}; \text{ ovverosia}$$

VI. *L' indice di omogamia della tabella completa è la media ponderata* (con pesi eguali agli elementi che compongono i gruppi) *dell' indice di attrazione del* BENINI *per la tabella dei gruppi aperti, e dell' indice di irregolarità dei gruppi chiusi residuali.*

Ci riserviamo di fare, in altra sede, applicazioni concrete di tali indici, come anche un loro inquadramento in teorie più generali.

Sugli indici di omogamia pura ed attenuata, e su certe interpretazioni iperspaziali

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 marzo 1934 - XII)

Sunto. — L'A. completa la ricerca iniziata in una precedente Nota, prendendo in esame un indice globale di omogamia, e considerando altresì il caso che si definiscano non solo coppie omogame o eterogame, ma anche coppie più o meno omogame (e ciò in conformità di certe ricerche di Gini e Galvani); il che induce a considerare l'omogamia non solo come carattere presente o assente ma anche come carattere graduabile. Infine l'A. accenna ad un'interpretazione unica di quest'indici (ed estensibile ad altri indici) come risultato di *operazioni vettoriali* in opportuni spazi.

Nella nostra precedente Nota [1]) abbiamo sostanzialmente esaminata l'omogamia in una distribuzione di coppie, come derivante da una opportuna divisione dicotomica effettuata nei caratteri scelti come base; operando sulle tre tabelle « *rilevata* ». « *casuale* », « *indifferente* » in base a tale concetto; ed ottenendo dei « *profili* ».

Ci proponiamo ora di esaminare la stessa collettività di coppie da due altri punti di vista; e precisamente da un lato definiremo degli indici globali di omogamia, di irregolarità, di sfasamento, con l'ammettere le sole alternative di omogamia presente od assente; e dall'altro considereremo la possibililà che l'omogamia rappresenti un carattere graduabile [2]) che vari — ad esempio — fra 1 per omogamia perfetta e 0 per omogamia assente.

Nella prima considerazione l'eterogamia si presenta sempre e solo nelle coppie le quali non siano omogame; nella seconda considerazione invece si potrà avere una definizione indipendente (come esemplificheremo).

---

[1]) Cfr. G. Andreoli. « *Su alcuni indici* »... etc., questi Rendiconti, anno corrente.

[2]) Qui ci riattacchiamo in pieno alle direttive fissate dal Gini e dal Galvani in questo campo. Cfr: C. Gini ed L. Galvani. *Di talune estensioni dei concetti di media ai caratteri qualitativi. Metron* Vol. VIII 1929 Roma.

2. Si abbia dunque la stessa collettività di coppie, distribuita come nella nota precedente, e si abbiano le tre tabelle fondamentali.

Chiameremo coppie omogame quelle che presentano, per il primo elemento la modalità r-esima per il primo carattere, e la modalità ad essa corrispondente (per semplicità di ordinamento, anche la r-sima) del secondo carattere nel secondo elemento della coppia; eterogame le rimanenti. In altre parole: le coppie situate sulla diagonale principale sono omogame (ed in numero di $\alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots \alpha_{nn}$); *tutte* le altre sono eterogame.

Operazione fondamentale, sarà quella di sommare assieme il numero di tutti gli elementi-coppie della diagonale principale, sottrarre da tale somma quella di tutti i rimanenti, e dividere tale differenza per il numero complessivo delle coppie esaminate.

Sostanzialmente ciò equivale a considerare il doppio della percentuale degli elementi sulla diagonale principale, diminuito di 1.

Formati tali numeri, si dirà *indice di sfasamento* la differenza fra il numero Δ così ottenuto dalla tabella rilevata e quello ottenuto dalla tabella casuale; *indice di irregolarità* la differenza fra questo secondo numero così ottenuto, e quello della tabella indifferente; *indice di omogamia* la differenza fra il primo e l'ultimo. (Abbiamo sempre omesso la parola globale).

È troppo evidente che tali indici risultano, quindi, semplicemente le differenze raddoppiate, fra le percentuali degli elementi diagonali delle rispettive tabelle.

3. La giustificazione teorica di tale procedimento è quanto mai semplice.

La tabella indifferente presenta, nelle singole caselle i numeri $\frac{A}{n^2}$; e come somme per linee o per colonne i numeri $\frac{A}{n}$; la tabella casuale presenta invece nella casella di posto (r, s) il numero $\frac{A'_r A''_s}{A}$, e come somme (che sono eguali a quelle della tabella rilevata) per linee A'_r, e per colonne A''_s; quella rilevata infine, i numeri α_{rs}, A'_r, A''_s rispettivamente.

Ora, è ovvio che si potrà porre

$$A'_r = \frac{A}{n} + p_r \quad ; \quad A''_s = \frac{A}{n} + q_s$$

ove $p_1 + \ldots + p_n = q_1 + \ldots + q_n = O$; e per ovvii motivi di generalizzazione (oltre che di interpretazione geometrica come vettori) si ammetterà come « irregolarità » della tabella casuale rispetto alla indifferente, l'espressione $\frac{1}{A}(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \ldots p_n q_n)$.

Intanto, per la posizione fatta risulta

$$\frac{A_r' A_s''}{A} = \frac{A'}{n^2} + (p_r + q_s)\frac{1}{n} + p_r q_s;$$

Quindi la somma degli elementi diagonali della tabella casuale è data precisamente da $\frac{A}{n} + \sum p_r q_r$, essendo nulla la somma delle p e quella delle q; e siccome a sua volta la somma omologa della tabella indifferente è proprio $\frac{A}{n}$, la differenza fra la somma delle due diagonali rispettive dà precisamente la somma dei prodotti $p_r q_r$; e resta giustificato il risultato della operazione fondamentale. Cioè:

L'indice di irregolarità è dato dal doppio del rapporto fra differenza delle diagonali della tabella casuale e di quella indifferente, al numero totale delle coppie.

In modo del tutto analogo, si vede che, a sua volta,

$$\alpha_{rs} = \frac{A_r' A_s''}{A} + \beta_{rs}$$

ove i numeri β sono tali che sommati per linee o per colonne dànno ogni volta zero.

Se si assume come indice di sfasamento precisamente il doppio della somma dei β in diagonale divisi per A, a causa delle dette relazioni di somme nulle, ciò viene a coincidere con la differenza dei risultati ottenuti con l'operazione fondamentale applicata alla tabella rilevata ed a quella casuale.

Restano in tal modo giustificati i tre indici dianzi introdotti. È bene osservare che nel caso di divisione dicotomica i procedimenti stessi riconducono ad indici già noti; e che, volendo completare l'esame statistico delle tabelle stesse si potrebbe pensare alle medie quadratiche dei p, q; e delle β_{rr}.

Tali indici saranno detti di omogamia pura.

4. Un necessario complemento a quanto sopra è dato dal comportamento degli indici già introdotti rispetto a collettività che si presentino come somma di due (o più) altre.

Si abbia dunque la collettività (A) somma di (B) e di (C); sicchè ogni a_{rs} della casella di posto (r, s) risulta la somma di β_{rs} e γ_{rs} così $A'_r = B'_r + C'_r$; $A_s'' = B_s'' + C_s''$ $A = B + C$.

Risulta evidente che la tabella rilevata consta della somma d due tabelle rilevate; la tabella casuale risulta invece la somma d

altre quattro, ottenute con gli elementi $\frac{B_r' B_s''}{A}$; $\frac{C_r' C_s''}{A}$; $\frac{B_r' C_s''}{A}$; $\frac{C_r' B_s'}{A}$;

la indifferente con gli elementi $\frac{B+C}{n^2}$.

Il risultato della operazione fondamentale è distributivo rispetto alle tabelle; dunque facili considerazioni inducono ad affermare quanto segue:

Per una collettività somma di due altre, si ha

I. l'indice di omogamia della collettività completa è la media aritmetica degl'indici delle due parziali, ponderata con i numeri B e C degli individui delle due collettività parziali.

II. l'indice di sfasamento e l'indice di irregolarità sono le medie rispettive dei quattro indici che competono alle quattro collettività ottenute combinanando casualmente ciascuna delle coppie di composizione secondo i caratteri (cioè le $B'B''$; $C'C''$; $B'C''$; $C'B''$) ; costituite rispettivamente da B elementi, da C elementi, da $\sqrt{BC}$ elementi; la formazione delle medie si intende ponderata.

5. L'altro aspetto della quistione è quello che si ottiene considerando omogamia incompleta o attenuata (ad esempio matrimoni in una popolazione mista di bianchi, mulatti, negri).

Il caso più semplice è ovviamente il seguente: coppie completamente omogame sono quelle che presentano i caratteri corrispondentisi negli elementi che le formano; saranno invece « parzialmente omogame » in misura $S = 1 - \frac{|r-s|}{n}$, le coppie di cui i caratteri distino per $|r-s|$; cioè le coppie situate sulle due parallele immediatamente vicine alla diagonale principale hanno omogamia ridotta da 1 ad $1 - \frac{1}{n}$; quelle situate sulle due successive parallele hanno omogamia in misura $1 - \frac{2}{n}$;....; gli elementi estremi della diagonale secondaria — cioè α_{1n}, α_{n1} — infine hanno omogamia $\frac{1}{n}$.

Ciò significa che nella formazione delle coppie, l'omogamia si presenta come un terzo carattere (o accompagna un terzo carattere qualitativo) distribuito secondo quella legge.

Gli indici introdotti restano, in tale caso, definiti in modo analogo: soltanto l'*operazione fondamentale* consisterà in questo caso nella seguente successione:

I. Sommare i numeri di tutte le coppie situate sulla diagonale principale.

II. Sommare i numeri di tutte le coppie situate sulle due pa-

rallele vicine, moltiplicando tale numero per $\frac{n-1}{n}$; sommare successivamente le coppie sulle parallele via via più distanti, moltiplicando ordinatamente per $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$, ...

III. Considerare la somma di tutti questi numeri, divisa per il numero totale delle coppie.

La differenza fra il risultato così ottenuto per la tabella rilevata e quella casuale etc., etc., darà i soliti indici.

6. Più generalmente il processo può essere ampliato, sostituendo ai numeri $1, \frac{n-1}{n}, \ldots,$ i numeri $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ tutti minori, in modulo di 1, aventi funzioni di pesi relativi o di frequenze. Così la scelta dei numeri $1, -1, -1, -1, \ldots$ ci riconduce alla primitiva definizione di indici di omogamia totale.

Qui si vede che, se si introduce come *eterogamia* il criterio di scelta di elementi il più distanti possibili come caratteri, l'operazione stessa va ripetuta — ad esempio — rispetto alla diagonale secondaria ed alle sue parallele; ed in tal caso (come corrispondente al caso esemplificato dianzi) l'eterogamia si potrà considerare totale per gli elementi della seconda diagonale, fissando non eterogami gli altri; oppure fissando 1 per misura della eterogamia di quelli ed $1 - \frac{|n+1-r-s|}{n}$ per misura dell'eterogamia di elementi situati in una casella qualunque.

Questo deriva dal semplice fatto logico che, per divisioni non dicotomiche, le coppie non completamente omogame non sono necessariamente eterogame (e reciprocamente). Le considerazioni fatte nel capo precedente per collettività somme di altre valgono ovviamente anche in questo caso.

7. Riassumendo:

I. Nella definizione di indici di omogamia conviene introdurre le tre tabelle: *rilevata, casuale, indifferente*; e tre indici: di *sfasamento* (fra I e II), di *irregolarità* (fra II e III) di *omogamia* (fra I e III).

II. Ad ogni criterio di *misura* del carattere « omogamia » dovuta alla presenza nella coppia, del primo elemento — con modalità r-sima del primo carattere — e del secondo — con modalità s-sima del secondo carattere — corrisponde una operazione fondamentale eseguita sulle tabelle (ridotte in percentuali).

III. Gli indici sono precisamente le differenze fra i valori ottenuti dalle rispettive tabelle con l'applicazione della operazione fondamentale.

IV. Il caso più semplice è quello di omogamia e non-omogamia; ma anche altri casi sono definibili e possibili.

V. Salvo il caso di divisione dicotomica, omogamia e non-eterogamia; eterogamia e non-omogamia danno luogo ad indici in generale diversi.

VI. Per collettività somme di altre vale il principio della media: cioè l'indice totale è la media degli indici parziali. È bene osservare che tali procedimenti si possono ripetere per il caso che invece di coppie si considerino terne, quaterne, ... n-plo. Anzi, per n molto grande, se si parte da una divisione dicotomica (0 ed 1) per i caratteri K', K'', ... e si definisce l'omogamia attenuata come caratterizzata dalla media dei caratteri presenti (cioè da $\frac{1}{n}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... \varepsilon_n)$, con le ε eguali 0 o 1] si ritrova precisamente la curva fondamentale degli errori come legge di distribuzione delle n-ple, rispetto a tale omogamia attenuata, per la tabella indifferente.

Resta dunque aperta attraverso tale considerazione una via di collegamento alle diverse statistiche (in uso nella fisica, o nella teoria della ereditarietà biologica ove si considerino valori molto grandi di n e si fissino forme assintotiche di sviluppi.

8. Del resto tutti gli indici qui definiti acquistano un chiaro e perspicuo significato geometrico — quale è quello di prodotto scalare — se le osservazioni statistiche si interpretano come punti di opportuni spazi.

In effetti, due tipi di spazi converrebbe prendere in esame, agli effetti di tali interpretazioni. Il primo tipo — che si presenta più immediato — si potrebbe chiamare «*spazio di osservazione*» e si ottiene (come esempio, e nel caso più semplice) riportando la serie ordinata dei valori di N osservazioni (misure, rilevamenti) come coordinate cartesiane successive in uno spazio ad N dimensioni. Se tutte le osservazioni sono eguali, e quindi esatte, come rappresentante della serie di osservazioni della quantità da misurare si ottiene un punto della diagonale principale di tale spazio.

Il secondo tipo, che più propriamente qui ci interessa, si potrebbe chiamare «*spazio di frequenza*».

Esso si ottiene riportando ordinatamente come coordinate le frequenze (assolute o relative) delle distribuzioni rispetto ad uno o più caratteri — rilevati con certe modalità.

Così, nei casi da noi considerati, avendo considerato n modalità del carattere K' ed n corrispondenti di K'', vi saranno n^2 modalità della coppia di caratteri; quindi lo spazio di frequenza sarà ad n^2 dimensioni; e come coordinata di posto (rs) del punto P imagine della

distribuzione in esame, si assumerà proprio la frequenza rilevata $\alpha_{r,}$ (oppure quella uniforme o quella casuale).

Orbene, se ricordiamo che l'operazione fondamentale consiste nel moltiplicare ciascuna α_{rs} per un certo ρ_{rs} (in modulo minore di 1), sommare i valori così ottenuti e dividere per $A = \Sigma\alpha_{rs}$, si riscontra agevolmente che ciò equivale — a meno di un fattore numerico fisso dipendente dalle ρ — a fare quanto segue:

I. Considerare il vettore OP, ove P sia imagine di $\| \alpha_{rs} \|$.

II. Considerare il vettore OR, ove R sia imagine di $\| \rho_{rs} \|$, soddisfacente alla condizione di essere scelto nell'ipercubo fondamentale di centro in O e di lati 2.

III. Formare i prodotti scalari $OP \times OR$; $OP \times OI$, ove I abbia tutte le coordinate eguali ad 1 (e tale prodotto vale precisamente A).

IV. Formare il quoziente di $OP \times OR$ per $OP \times OI$.

Dunque in definitiva l'operazione fondamentale viene ad essere collegata al quoziente dei coseni di due angoli, di cui il primo dipende dalla rilevazione ed il secondo è fisso.

Gli indici si ottengono come differenze di questo quoziente, con gli analoghi relativi alla distribuzione casuale ed a quella indifferente (rappresentata da un punto della diagonale principale).

Come abbiamo detto, costituzioni ed interpretazioni analoghe valgono — ad esempio — per i coefficienti di correlazione, per le medie aritmetiche semplici o ponderate e così via.

Sui teoremi d'esistenza di Riemann

Nota del socio corrispondente **Renato Caccioppoli**

(Adunanza del dì 10 Marzo 1934-XII)

Sunto. — Oggetto di questa nota è l'indicazione di un metodo, per la risoluzione dei problemi d'esistenza di Riemann, informato ad un principio suscettibile di numerose altre applicazioni.

Espongo in questa nota un metodo per la risoluzione dei problemi esistenziali di Riemann nella teoria delle funzioni algebriche. Questo metodo si fonda sostanzialmente sui risultati elementari della teoria delle funzioni ortogonali di quadrato sommabile; ma mi sembra sopra tutto concettualmente notevole, per la semplicità del principio informatore, che potrà applicarsi alla deduzione di numerosi altri teoremi d'esistenza, in analoghi problemi di carattere lineare.

L'idea, in breve, è di provare l'esistenza di una certa funzione armonica partendo dalla considerazione della classe di tutti i Δ_2 relativi a funzioni soddisfacenti alle altre condizioni del problema (p. es. dotate, su una riemanniana chiusa, di assegnati moduli di periodicità), e deducendo dalle proprietà di questa classe che essa contiene necessariamente lo zero.

Adotterò naturalmente la definizione più generale e moderna della superficie di Riemann, quella cioè di *superficie topologicamente definita, e dotata inoltre di una metrica angolare* introdotta nell'intorno di ogni punto mercè la variabile complessa locale, che fornisce di tale intorno una rappresentazione piana *conforme.* [1])

1. Della superficie di Riemann chiusa S fissiamo una particolare *triangolazione*, abbastanza serrata perchè uno qualunque T_k dei triangoli $T_1, T_2, \ldots T_n$ si rappresenti conformemente, mediante una variabile complessa locale, su un campo U_k del piano xy. [2]) Consideriamo poi su S una *distribuzione di massa* positiva o negativa, cioè una funzione additiva reale $M(C)$ dei campi C di $S : M$ sia *assolutamente*

---

[1]) Cfr. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig, Teubner. 1923).

[2]) Intendiamo qui sempre riferirci a rappresentazioni conformi *includenti i contorni,* cioè prolungabili oltre questi.

continua, cioè definita in ogni triangolo T_k di S mediante l'integrale doppio indefinito di una funzione $\delta_k(x, y)$ dei punti del campo U_k su cui si rappresenta T_k; S_k potrà chiamarsi *densità* di M su U_k. Supponiamo inoltre che sia finita la somma

$$\Sigma(M) = \sum_{k=1}^{n} \iint_{U_k} \delta_k^2(x, y)\,dx\,dy\,;$$

segue da queste ipotesi che è finita anche la somma

$$\sum_{k=1}^{n} \iint_{U_k} |\delta_k(x, y)|\,dx\,dy$$

che (ovviamente indipendente dalla triangolazione adottata) può simboleggiarsi mediante l'integrale $\int_S |dM|$. Sono poi immediate, se $\varphi(P)$ è una funzione dei punti di S, e C un campo di S, le definizioni degli integrali

$$\int_C \varphi(P)\,dM \quad , \quad \int_C \varphi(P)\,|dM|\,.$$

Inoltre, se C si rappresenta conformemente sul campo D del piano xy, risulta convergente l'integrale del quadrato della densità di M su D,

$$\iint_D \delta^2(x, y)\,dx\,dy\,.$$

La densità sul piano di una distribuzione di massa M dipende dal punto P considerato su S, nonchè dalla variabile complessa locale adottata in P, ed ha il carattere di *differenziale doppio*, cioè si trasforma nel passaggio dalla variabile locale $x + y$ all'altra $x' + iy'$ mediante moltiplicazione per

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2.$$

Le distribuzioni di massa dotate delle proprietà elencate costituiscono una famiglia F *chiusa*, quando si definisca la relazione di limite $M = \lim\limits_{n \to \infty} M_n$ mediante l'altra

$$\lim_{n \to \infty} \Sigma(M - M_n) = 0\,;$$

F si identifica ovviamente con uno spazio lineare metrico completo, prendendo come *distanza* tra M' e M'' l'espressione

$$\| M' - M'' \| = \sqrt{\Sigma(M' - M'')}.$$

2. Sia $\varphi(P)$ una funzione reale sulla superficie, avente derivate seconde continue (cioè trasformata mediante ogni rappresentazione conforme di una porzione di S in una funzione di x, y dotata di derivate seconde continue): l'espressione $\Delta_2\varphi$, relativa al punto P e alla variabile locale z, si comporta come un differenziale doppio, poichè

$$\Delta_2\varphi(x', y') = \Delta_2\varphi(x, y) \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2\right];$$

quindi $\Delta_2\varphi$ appartiene come densità ad una distribuzione di massa M_φ. Indicheremo con F_1 l'insieme di quelle distribuzioni della famiglia F che possono dedursi in tal modo da funzioni φ su S, e con F_2 l'*involucro* di F_1, cioè la famiglia (varietà lineare in F) costituita dalle distribuzioni di F_1 e dai loro limiti (nel senso suesposto).

Siano $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ una successione di funzioni su S, e $M_1, M_2, \ldots$ quella delle corrispondenti funzioni d'insieme M_φ. Si vede subito che quando la seconda successione ammette limite, cioè quando

$$\lim_{p,q \to \infty} \| M_p - M_q \| = 0,$$

la prima converge uniformemente sempre che converga in un punto particolare P_0. Basta provare che dalle relazioni

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{M}_n = 0 \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \varphi_n(P_0) = 0$$

segue $\lim \varphi_n = 0$ uniformemente su S. Ed invero, se così non fosse, si potrebbe supporre $\max |\varphi_n| = 1$, tenendo sempre M_n allo zero. Sia allora Γ un cerchio del piano xy, su cui si rappresenti conformemente l'intorno di un punto qualunque di S: la successione delle funzioni $\varphi_n(x, y)$, definita così in Γ, dovrebbe contenere una successione convergente uniformemente verso una funzione armonica nelnell'interno di Γ, e ciò perchè

$$\lim_{n \to \infty} \iint_\Gamma [\Delta_2\varphi_n(x, y)]^2 dx dy = 0,$$

conservandosi limitate le funzioni φ. Pertanto, si potrebbe dalla successione $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ estrarne un'altra convergente uniformemente verso

una funzione armonica su S: e questa, dovendo necessariamente ridursi ad una costante, ed annullarsi in P_0, sarebbe identicamente nulla, contro l'ipotesi max $|\varphi_n| = 1$. Si riconosce così pure che quando

$$\lim_{n \to \infty} M_n = M \quad , \quad \lim_{n \to \infty} \varphi_n = \varphi ,$$

se la densità di M ammette derivate prime continue (cioè è derivabile rispetto alle x, y di ogni variabile locale) essa coincide con $\Delta_2 \varphi$; sicchè ogni distribuzione di F_2, a densità derivabile, può dedursi come M_φ da qualche funzione $\varphi(P)$.

3. Dimostreremo ora che *condizione necessaria e sufficiente affinchè una distribuzione* M *della famiglia* F *appartenga anche a* F_2 *è che* $\mathrm{M(S)} = 0$*, cioè che la massa complessiva su* S *sia nulla.*

Giungeremo a questo risultato attraverso la considerazione delle operazioni funzionali lineari sulle distribuzioni M, rappresentate da integrali del tipo $\int_S f(P) dM$; un simile integrale esiste per ogni M di F sempre che f abbia quadrato sommabile, cioè che sia finita la somma

$$\sum_{k=1}^{n} \iint_{U_k} f_k^2(x, y) dx dy ,$$

dove $f_k(x, y)$ è la funzione corrispondente a $f(P)$ nella trasformazione conforme di T_k in U_k. Perchè appartenga ad F_2 ogni distribuzione con massa complessiva $M(S)$ nulla occorre e basta che la relazione

$$\int_S f(P) dM = 0$$

non possa essere verificata simultaneamente da tutte le distribuzioni di F_2 che quando f sia costante (o *equivalente* ai fini dell'integrazione ad una costante, cioè coincidente con essa quasi ovunque); sicchè un'operazione lineare sulle distribuzioni M di F, che dia risultato nullo quando M appartiene alla varietà lineare F_2, conduca ancora allo zero per $M(S) = 0$. [1])

Consideriamo l'intorno di un punto generico di S, e rappresentiamolo conformemente su un campo D del piano xy: una funzione $f(P)$ avente la proprietà anzidetta si trasformerà in una funzione $f(x, y)$, che dovrà coincidere quasi ovunque con una funzione armo-

---

[1]) Cfr. HAHN, *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen*, Journ. für Math. 157 (1927). — ASCOLI, *Sugli spazi lineari metrici e le loro varietà lineari*. Ann. di Mat. (4), 10, (1932).

nica in D. Siano infatti (x_0, y_0) un punto interno a D, ρ la distanza di (x, y) da (x_0, y_0), r il raggio di un cerchio Γ di centro (x_0, y_0) e interno a D. Dalla considerazione della distribuzione M su S avente densità eguale a $\Delta_2(r-\rho)^3$ su Γ, e nulla altrove (distribuzione che appartiene evidentemente a F_2) si trae l'eguaglianza

$$\iint_\Gamma f(x, y)\left[2(r-\rho) - \frac{(r-\rho)^2}{\rho}\right] dxdy = 0,$$

valida per ogni r sufficientemente piccolo; donde, indicando con $\mu(\rho)$ la media dei valori di $f(x, y)$ sulla circonferenza di raggio ρ concentrica a Γ,

$$\int_0^r \mu(\rho)[2(r-\rho)\rho - (r-\rho)^2]d\rho \leqq 0,$$

donde ancora (per derivazione rispetto ad r)

$$\int_0^r \mu(\rho)(2\rho - r)d\rho = 0;$$

$$\int_0^r \mu(\rho)d\rho = c(x_0, y_0)r.$$

Segue di qui che il valor medio di $f(x, y)$ in un cerchio dipende solo dal centro di questo, e che pertanto f coincide quasi ovunque con una funzione armonica. Ma poichè una funzione armonica su tutta la superficie S si riduce ad una costante, $f(P)$ non può essere che equivalente ad una costante: la dimostrazione è così ultimata.

Si può enunciare in breve il risultato dicendo che ogni densità è un Δ_2, purchè la massa complessiva sia nulla.

4. Le considerazioni che precedono conducono immediatamente ai *teoremi di esistenza per gli integrali abeliani su* S.

Per gli integrali di *prima specie*, occorre dimostrare l'esistenza su S di una funzione armonica polidroma, avente dati moduli di periodicità. Sia $f(P)$ una qualunque funzione tre volte derivabile e dotata delle periodicità assegnate [1]; la densità $\Delta_2 f$ corrisponde ad una massa complessiva nulla, poichè

$$\sum_{k=1}^{n} \iint_{U_k} \Delta_2 f_k(x, y)dxdy = 0.$$

---

[1]) È evidente che una funzione cosiffatta si può costruire in infiniti modi.

Consideriamo allora la funzione $\varphi(P)$ (individuata a meno di una costante additiva arbitraria) monodroma su S, per cui $\Delta_2\varphi = \Delta_2 f$: la differenza

$$u(P) = f(P) - \varphi(P)$$

darà la funzione richiesta.

Per costruire un integrale normale di *seconda specie*, si deve disporre di una funzione armonica monodroma, singolare in un unico punto P_0 come la parte reale della reciproca di una variabile locale $x + iy$. Sia $f(P)$ una funzione monodroma continua e tre volte derivabile tranne in P_0, nulla su S fuori di un intorno J di P_0, ed in un intorno J' coincidente con

$$\frac{x}{x^2 + y^2};$$

si possono prendere per J, J' i campi corrispondenti a due cerchi Γ, Γ' concentrici nell'origine sul piano xy. Anche qui a $\Delta_2 f$ corrisponde una massa nulla [1]), sicchè esiste una funzione φ per cui $\Delta_2\varphi = \Delta_2 f$, e la funzione $f - \varphi$ risolve il problema.

Infine, la parte reale di un integrale normale di *terza specie* è data da una funzione armonica avente due moduli di periodicità polari, eguali in valore assoluto e di segni opposti, relativi a due punti P_0 e P_1; e questa si può decomporre in una somma di funzioni analoghe, per le quali P_0 e P_1 possono supporsi arbitrariamente prossimi. La funzione ausiliaria $f(P)$ si definirà ora come costante (nulla a meno di multipli del modulo di periodicità) fuori di J, e coincidente in J' con la differenza $\theta - \theta_1$ tra le anomalie del punto (x, y) relative al centro di Γ e ad un altro punto interno a Γ', successivamente assunti come poli: e anche in questo caso, come nei precedenti, esiste la funzione monodroma complementare $\varphi(P)$.

---

[1]) Ciò è conseguenza immediata del fatto che la derivata normale di

$$\frac{x}{x^2 + y^2}$$

ha integrale nullo lungo Γ.

Sulla risoluzione numerica dell' equazione $\sum_1^n {}_i x^i = k$

Nota del prof. **Enrico Lenzi**

(Adunanza del dì 10 marzo 1934-XII)

Sunto. — L' A. riprende in esame vari metodi usati per risolvere con approssimazioni successive l' equazione $\sum_1^n {}_i x^i = k$ ove $o < k < n$, e stabilisce una formola per ottenere subito un valore molto approssimato della radice incognita. Determina infine un confine superiore dell' errore che si commette usando la formola stessa.

1. Hanno particolare importanza per le applicazioni, in matematica finanziaria, le equazioni della forma

$$x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = k \tag{1}$$

ove k è un numero reale positivo.

Il primo membro della (1) per $x \geq 0$ ammette derivata positiva e quindi è funzione crescente di x. D'altra parte per $x = 0$ esso si annulla, per $x = 1$ assume il valore n, per x tendente a $+\infty$ tende a $+\infty$; e quindi esiste un valore positivo ξ, ed uno solo, che verifica la (1), ed è $\xi \lesseqgtr 1$ secondo che $k \lesseqgtr n$.

Escluso il caso che sia $k = n$ e quindi $\xi = 1$, per ogni altro valore di x il primo membro della (1) è identicamente uguale $x(1-x^n)|(1-x)$ cioè a $(1-x^n)|\left(\frac{1}{x} - 1\right)$. Posto allora

$$\frac{1}{x} - 1 = y \quad ; \quad x = \frac{1}{1+y}$$

la (1) diventa

$$(1 + y)^{-1} + (1 + y)^{-2} + \dots + (1 + y)^{-n} = k \tag{2}$$

il cui primo membro sarà indicato nel seguito con $a(y)$. Porremo inoltre

$$s(y) = a(y)\,(1 + y)^n = (1 + y)^{n-1} + (1 + y)^{n-2} + \dots + 1 .$$

Per essere ξ positivo occorre che il corrispondente valore di y, e sia j, risulti maggiore di -1; sarà poi $\xi \gtreqless 1$ secondochè $j \gtreqless 0$; e risulta ovviamente per $j \gtreqless 0$:

$$a(y) \lesseqgtr n \quad ; \quad s(y) \gtreqless n \tag{3}$$

Fermiamoci a considerare il caso che sia $k < n$ e quindi $j > 0$. La (2) si può allora scrivere

$$\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} = k$$

o anche

$$y = \frac{1}{k} - \frac{1}{k(1+y)^n} = \varphi(y) \tag{4}$$

Si dimostra facilmente che se j_0 è valore approssimato per difetto di j, sarà $j_1 = \varphi(j_0)$ valore approssimato per difetto di j ed è $j_0 < j_1 < j$. In generale se $j_r = \varphi(j_{r-1})$ e $j_{r-1} < j$ sarà $j_{r-1} < j_r < j$. Sicchè la successione

$$j_0, j_1, j_2, \ldots .$$

è crescente, limitata superiormente e quindi ammette un limite; e si dimostra che questo limite è j. Però la successione converge molto lentamente ad j.

Dimostrai altrove [1]), che se invece di operare sulla funzione $\varphi(y)$, si opera sull'altra funzione

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{s(y)} = \psi(y) \tag{5}$$

si ottiene una successione che tende ad j più rapidamente; operando poi sulla funzione

$$\frac{1}{k} - \frac{k}{s(y)a(y)} = \sigma(y) \tag{6}$$

la successione tende ad j molto rapidamente. In questo caso però, per valori di n non molto grandi, la successione non è monotona e quindi, anche fermandosi al terzo termine, cioè applicando due volte sole il procedimento, si ottiene un valore che è molto approssimato ad j, ma di cui non si può affermare se sia approssimato per difetto o per eccesso.

Le tre funzioni ora considerate possono essere scritte:

$$\varphi(y) = \frac{1}{k} - \left[\frac{k}{a(y)}\right]^{-1} \frac{1}{s(y)}; \quad \psi(y) = \frac{1}{k} - \left[\frac{k}{a(y)}\right]^{0} \frac{1}{s(y)};$$

$$\sigma(y) = \frac{1}{k} - \left[\frac{k}{a(y)}\right]^{1} \frac{1}{s(y)}$$

---

[1]) Cfr. *Sul metodo di iterazione per il calcolo del tasso di una rendita certa* in *Giornale dell' Istituto italiano degli Attuari.* Anno V, n. 1.

cioè sono della comune forma

$$\frac{1}{k}-\left[\frac{k}{a(y)}\right]^r\frac{1}{s(y)}$$

ove r assume rispettivamente i valori $-1, 0, 1$. Sorge così naturale la questione di determinare un valore di r che renda la successione convergente ad j con la maggiore rapidità possibile, e che sia monotona.

3. Si consideri la funzione

$$[a(y)]^r s(y)=[a(y)]^{r+1}(1+y)^n$$

la cui derivata rispetto ad y è

$$D_y\{[a(y)]^{r+1}(1+y)^n\}=$$

$$=n[a(y)]^{r+1}(1+y)^{n-1}+(r+1)[a(y)]^r(1+y)^n\frac{ny(1+y)^{-n-1}-1+(1+y)^{-n}}{y^2}=$$

$$=[a(y)]^r(1+y)^{-1}\left\{ns(y)+(r+1)\frac{ny-(1+y)^{n+1}+(1+y)}{y^2}\right\}=$$

$$=[a(y)]^r(1+y)^{-1}\left\{ns(y)+(r+1)\frac{ny-(1+y)[(1+y)^n-1]}{y^2}\right\}=$$

$$=[a(y)]^r(1+y)^{-1}\left\{ns(y)+(r+1)\frac{ny-(1+y)ys(y)}{y^2}\right\}=$$

$$=[a(y)]^r(1+y)^{-1}s(y)\left\{n+(r+1)\frac{\frac{n}{s(y)}-(1+y)}{y}\right\}=$$

$$=\frac{[a(y)]^r s(y)}{y(1+y)}\left\{ny-(r+1)\left[1+y-\frac{n}{s(y)}\right]\right\}$$

La derivata della funzione $[a(y)]^r s(y)$ risulterà dunque positiva se

$$(r+1)\left(1+y-\frac{n}{s(y)}\right)<ny;$$

o anche, dato che l'espressione $1+y-\frac{n}{s(y)}$ è positiva, essendo $n<s(y)$, se

$$r+1<\frac{ny}{1+y-\frac{n}{s(y)}}=\lambda(y) \tag{7}$$

La funzione $\lambda(y)$ è funzione crescente di y. Il numeratore della sua derivata è infatti uguale a:

$$n\left(1+y-\frac{n}{s(y)}\right)-ny\left(1+n\frac{\frac{ds(y)}{dy}}{[s(y)]^2}\right)=$$

$$=n\left(1-\frac{n}{s(y)}\right)-n^2y\frac{ny(1+y)^{n-1}-(1+y)^n+1}{[(1+y)^n-1]^2}=$$

$$=\frac{n}{[(1+y)^n-1]^2}\{[(1+y)^n-1]^2-ny[(1+y)^n-1]-$$

$$-ny[ny(1+y)^{n-1}-(1+y)^n+1]\}=$$

$$=\frac{n^2y^2}{[(1+y)^n-1]^2}\left\{\left[\frac{(1+y)^n-1}{ny}\right]^2-(1+y)^{n-1}\right\}$$

Ma l' espressione in parentesi $\{\ \}$ è uguale a

$$\left[1+\frac{n-1}{2}y+\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}y^2+\dots\right]^2$$

$$-\left(1+(n-1)y+\frac{(n-1)(n-2)}{2}y^2+\dots\right)$$

ed è facile vedere che essa è positiva. Segue che $\lambda(y)$ è funzione crescente di y. Ma allora fissato un valore y_0, per ogni $y>y_0$ sarà $\lambda(y)>\lambda(y_0)$ e quindi se $\rho(y_0)=\lambda(y_0)-1$, sarà $\rho(y_0)<\lambda(y)-1$ cioè la funzione $[a(y)]^\rho s(y)$ per $y>y_0$ è crescente; e per $y<y_0$ essa è decrescente e quindi ammette un minimo per $y=y_0$.

Se j_0 è valore approssimato per difetto di j e $\rho=\lambda(j_0)-1$, sarà allora

$$[a(j_0)]^\rho s(j_0)<[a(j)]^\rho s(j)$$

e quindi

$$\frac{1}{s(j)}<\left[\frac{a(j)}{a(j_0)}\right]^\rho\frac{1}{s(j_0)}$$

e poichè $a(j)=k$ sarà

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{s(j)}>\frac{1}{k}-\left[\frac{k}{a(j_0)}\right]^\rho\frac{1}{s(j_0)}=j_1$$

cioè j_1 è approssimato per difetto ad j.

È interessante far vedere che il valore così ottenuto è maggiore di quelli che si sarebbero ottenuti usando le funzioni $\psi(y)$ e $\varphi(y)$, e quindi che esso è maggiore di j_0.

Basta infatti osservare che ρ risulta sempre maggiore di zero; giacchè

$$(n-1)(1+y)^n>(1+y)^{n-1}+(1+y)^{n-2}+\dots+(1+y)=s(y)-1$$

e quindi

$$(n-1)\,[(1+y)^n-1]>s(y)-n \quad ; \quad (n-1)ys(y)>s(y)-n$$

per cui

$$ny>1+y-\frac{n}{s(y)}.$$

Segue che per ogni $y>0$ è $\lambda(y)>1$; e perciò $\rho(j_0)=\lambda(j_0)-1$ è maggiore di zero. Ma allora, dato che $a(j_0)>k$ sarà $\left[\frac{k}{a(j_0)}\right]^\rho$ minore di 1; e quindi

$$j_1=\frac{1}{k}-\left[\frac{k}{a(j_0)}\right]^\rho\frac{1}{s(j_0)}>\frac{1}{k}-\frac{1}{s(j_0)}$$

Ma il secondo membro è il valore che si ottiene partendo dal valore j_0 ed operando con la funzione $\psi(y)$, e, come si è detto, questo valore è maggiore di quello che si ottiene operando con la funzione $\varphi(y)$, ed entrambi sono maggiori di j_0. Si può perciò concludere che partendo da un valore approssimato per difetto j_0, ed operando con la funzione

$$\frac{1}{k}-\left[\frac{k}{a(y)}\right]^\rho\frac{1}{s(y)}=\Phi(y)\ ,\ \text{ove}\ \rho=\frac{nj_0}{1+j_0-\dfrac{n}{s(j_0)}}-1 \qquad (8)$$

si ottiene un valore più approssimato dei precedenti. La funzione $\Phi(y)$ si presenta poi più vantaggiosa della funzione $\sigma(y)$ in quanto che la nuova funzione permette di passare da un valore approssimato per difetto ad un altro ancora più approssimato, ed anch'esso approssimato per difetto.

4. Quanto al grado di approssimazione che si ottiene operando con la nuova funzione, è evidente che esso dipende dal grado di approssimazione del valore da cui si parte; e quindi conviene partire da un valore quanto più approssimato sia possibile.

Nella pratica finanziaria esistono dei prontuari che danno valori della funzione $a(y)$ in corrispondenza a valori di y che variano da 0·00125 a 0·02, in progressione aritmetica di ragione 0·00125; da 0·02 a 0·04 con ragione 0·0025; da 0·04 a 0·08 con ragione 0·005. Qualora si disponga di questi prontuari ed il valore k sia compreso fra due valori di $a(y)$ corrispondenti alla durata n e compresi nella tavola, si può procurarsi agevolmente un valore approssimato j_0 di j.

Indipendentemente da queste tavole si può osservare che $\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$ è sempre un valore approssimato per difetto della radice incognita j;

e per valori non molto piccoli di n e di j anche $\frac{1}{k} - \frac{1}{2n-k}$ è un valore approssimato per difetto.

In generale si può assumere per j_0 quest'ultimo valore; calcolando allora, come è necessario, $\frac{k}{a(j_0)}$, se risultasse $\frac{k}{a(j_0)} > 1$ si potrebbe senz'altro abbandonare il valore $\frac{1}{k} - \frac{1}{2n-k}$ ed assumere per j_0 il valore $\frac{1}{k} - \frac{1}{n}$.

Qui si riportano alcuni risultati ottenuti applicando la $\Phi(y)$, e partendo da $j_0 = \frac{1}{k} - \frac{1}{2n-k}$.

n	k	j_0	j_1	j	n	k	j_0	j_1	j
5	0.19997	4.89861	4.99999	5	25	19.5235	0.02674	0.02999	0.03
5	1.73663	0.45481	0.49999	0.5	25	15.6221	0.03492	0.03996	0.04
8	0.49992	1.93579	1.99999	2	25	14.0939	0.04310	0.04995	0.05
10	0.66660	1.44843	1.49999	1.5	50	25.7298	0.02540	0.02996	0.03
10	0.99902	0.94836	0.99999	1	50	18.2559	0.04254	0.04995	0.05
10	1.96532	0.45338	0.49994	0.5	50	12.2335	0.07035	0.07997	0.08
10	7.72174	0.04806	0.04999	0.05	75	23.6804	0.03443	0.03996	0.04
15	0.99997	0.96555	0.99999	1	100	31.5989	0.02571	0.02997	0.03

5. Come si vede in tutti i casi il valore che si ottiene risulta approssimato a meno di un decimillesimo. Poichè peraltro a chi effettui il calcolo non è noto il valore di j ed egli quindi non può giudicare quale errore si commetta arrestandosi al valore j_1 ottenuto, o se convenga invece riapplicare, partendo dal risultato conseguito, ancora una volta il procedimento, interessa potere stabilire con facilità un confine superiore dell'errore che si commette fermandosi ad j_1.

Si consideri a tal uopo la funzione $\frac{1}{a(y)} = \frac{y}{1-(1+y)^{-n}}$. Derivando rispetto ad y si ha:

$$D_y\left(\frac{1}{a(y)}\right) = \frac{1-(1+y)^{-n} - yn(1+y)^{-n-1}}{[1-(1+y)^{-n}]^2} .$$

Derivando ancora risulta

$$D_y^2\left(\frac{1}{a(y)}\right)=\frac{yn(n+1)(1+y)^{-n-2}-yn(n+1)(1+y)^{-2n-2}}{[1-(1+y)^{-n}]^3}+$$

$$+\frac{-2n(1+y)^{-n-1}+2n(1+y)^{-2n-1}+2n^2y(1+y)^{-2n-2}}{[1-(1+y)^{-n}]^3}=$$

$$=\frac{n(1+y)^{-n-2}\{y(n+1)-2(1+y)+2(1+y)^{-n+1}+y(n-1)(1+y)^{-n}\}}{[1-(1+y)^{-n}]^3}$$

$$=\frac{n(1+y)^{-n-2}\{(1+y)^{-n}[2+y(n+1)]-[2-(n-1)y]\}}{[1-(1+y)^{-n}]^3}$$

$$=\frac{n(1+y)^{-2n-2}}{[1-(1+y)^{-n}]^3}\{2+y(n+1)-[2-(n-1)y](1+y)^n\}.$$

Ma l'espressione in $\{\quad\}$, come si verifica facilmente, risulta positiva e quindi la derivata seconda della funzione $\frac{1}{a(y)}$ è positiva.

Ciò premesso si osservi che per la determinazione di j_1 era occorso calcolare $\frac{1}{a(j_0)}$ e $\frac{1}{k}=\frac{1}{a(j)}$. Se ora mediante j_1 si calcola $\frac{1}{a(j_1)}$, si può determinare un valore approssimato di j mediante l'extrapolazione lineare.

Per formula nota si ha infatti:

$$j=j_1+\frac{\frac{1}{a(j)}-\frac{1}{a(j_1)}}{\frac{1}{a(j_1)}-\frac{1}{a(j_0)}}(j_1-j_0)+R$$

ove

$$R=-\frac{j_1-j_0}{\frac{1}{a(j_1)}-\frac{1}{a(j_0)}}\,\frac{1}{2}\,(j-j_0)(j-j_1)D_y^2\frac{1}{a(y_0)}$$

ove y_0 è un conveniente valore scelto fra j ed j_0. Or poichè $a(y)$ è funzione decrescente, $\frac{1}{a(y)}$ è funzione crescente; e quindi tutti i fattori del secondo membro di quest'ultima espressione sono positivi ed R risulta negativa.

Trascurando allora questo termine nell'uguaglianza che deve dare j si ottiene per j un valore approssimato per eccesso. In particolare si deduce che

$$\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{a(j_1)}}{\frac{1}{a(j_1)}-\frac{1}{a(j_0)}}(j_1-j_0) \qquad (9)$$

è un confine superiore dell'errore che si commette arrestando il procedimento alla determinazione di j_1. E poichè, come s'è visto, j_1 ed j sono molto vicini, il numeratore della frazione ora scritta risulta molto piccolo ed il confine superiore dà un'idea molto esatta dell'errore stesso.

Considereremo in una nota successiva il caso che sia $k > n$ e quindi $j < 0$.

Su di alcuni indici atti a misurare l'attrazione matrimoniale in classificazioni dicotome.

Nota del Dott. **G. de Meo**

(Adunanza del dì 7 aprile 1934 - XII)

Sunto. — L'A. mostra le relazioni intercedenti fra l'*indice di attrazione* del Benini ed alcuni altri indici recentemente proposti dall'Andreoli per lo studio dell'attrazione matrimoniale.

Sulla base di un'applicazione concreta, si prospetta l'opportunità che per la interpretazione del variare degli indici di attrazione nel tempo e nello spazio, si tenga anche conto delle variazioni della frequenza delle *combinazioni libere* nella massa dei matrimoni.

1. È noto che da molto tempo il Benini, nel Capitolo della sua Demografia [1]) dedicato allo studio delle forme di coesione per simpatia dell'aggregato sociale, — propose il calcolo di alcuni indici per l'esame dell'attrazione o repulsione che presentano gli individui simili o dissimili per un determinato carattere, ad unirsi fra loro in matrimonio. Tali *indici di attrazione* o *repulsione* sono stati largamente applicati dal Benini stesso e da molti altri statistici: fra questi va ricordato in ispecie il Savorgnan, che ha dedicato al problema dell'attrazione matrimoniale una larga messe di studi e ricerche [2]).

In questa breve nota, partendo appunto dagl'indici proposti dal Benini ed ampiamente illustrati e commentati dal Savorgnan [3]), abbiamo cercato di mettere in relazione tali indici con altri molto ge-

---

[1]) R. Benini, *Principi di Demografia*, Firenze, 1901.

[2]) F. Savorgnan, *La scelta matrimoniale*, in: « Biblioteca del Metron », 1924, dove sono raccolti in volume molti studi precedenti.

[3]) F. Savorgnan, *La misura dell'endogamia e dell'omogamia*, in: « Atti del Comitato Italiano per lo studio dei problemi della popolazione », Roma, 1931.

nerali recentemente proposti dall' ANDREOLI [1]. Non abbiamo per ora esteso il nostro esame ai molti indici che sono stati proposti da vari Autori per lo studio dell'attrazione [2].

Il fine di questa nota essendo prevalentemente metodologico, abbiamo preso a considerare soltanto un ristretto materiale già da noi precedentemente illustrato [3], relativo ai matrimoni celebrati in Italia nel ventennio 1912-31 distinti a seconda dello stato civile degli sposi anteriormente alle nozze.

2. Si sa che un matrimonio è detto *endogeno* quando gli sposi presentano entrambi il medesimo carattere considerato (per es.: nel caso di nazionalità, il matrimonio di un italiano con una italiana; nel caso di stato civile, il matrimonio di un celibe con una nubile ecc.). È detto *esogeno*, quando avviene il contrario. Orbene, se il carattere considerato presenta due sole modalità fra i maschi e due sole fra le femmine, è possibile, evidentemente, costruire una tabella a doppia entrata come la seguente, che è detta anche a classificazione *dicotoma*:

TAVOLA I

Distribuzione « effettiva »

M \ F	A_1'	A_2'	*Totali*
A_1	e_{11}	e_{12}	$e_{11} + e_{12}$
A_2	e_{21}	e_{22}	$e_{21} + e_{22}$
	$e_{11} + e_{21}$	$e_{12} + e_{22}$	$N = e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}$

[1]) G. ANDREOLI, *Sulla definizione di certi indici relativi a caratteri di omogamia, in problemi statistici.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli adunanza del 10 febbraio 1934 - XII.

[2]) C. GINI, *Indici di omofilia e di rassomiglianza e loro relazioni col coefficiente di correlazione e con gl'indici di attrazione,* in: « Atti del Reale Istituto veneto di Scienze, Lettere e Arti », 1914-15 t. LXXIV, Parte II. — YULE, *On the association of attributes in statistics,* « Phil. Trans. Roy. Soc. », vol. 194, 1900; *On the methode of measuring association between two attributes,* « Jour. Roy. Stat. Soc. », maggio 1912., etc.

[3]) G. DE MEO, *I matrimoni in Italia nel ventennio 1912-1931,* in: « Napoli », Rivista Municipale, N. 1-2, 1934 - XII.

Fra i maschi il carattere può presentare le modalità A_1 e A_2, e fra le femmine, le corrispondenti modalità sono A_1' e A_2'. Le coppie *endogene* saranno perciò le coppie e_{11} ed e_{22}; mentre le coppie *esogene* saranno le e_{21} ed e_{12}.

Il metodo introdotto dal Benini, consiste essenzialmente nel confronto di questa tabella contenente i dati effettivamente rilevati, con un'altra tabella che contiene invece i numeri e che si otterrebbero se le combinazioni matrimoniali avvenissero a caso. Se non vi fosse alcuna speciale preferenza o repulsione fra i maschi A_1 e le femmine A_1', la *probabilità* della formazione di una coppia *omogama* (A_1, A_1'), sarebbe, in base al teorema delle probabilità composte:

$$\frac{e_{11}+e_{12}}{N} \times \frac{e_{11}+e_{21}}{N} . \qquad (1)$$

La prima frazione indica infatti la probabilità di trovare nella massa N delle coppie, un maschio col carattere A_1; mentre la seconda indica l'analoga probabilità di trovare nella massa N delle coppie una femmina col carattere A_1'. Il *numero probabile* di coppie *omogame* sarà dato allora dall'espressione (1) moltiplicata per N, e cioè da:

$$\frac{(e_{11}+e_{12})\,(e_{11}+e_{21})}{N} \qquad (1')$$

Eseguendo sui numeri contenuti nella Tavola I, le quattro operazioni analoghe a quella descritta dalla formola 1' sopra indicata, si ottiene la seguente Tavola II che potremo chiamare Distribuzione « casuale »:

Tavola II

Distribuzione « casuale »

M \ *F*	A_1'	A_2'	*Totali*
A_1	c_{11}	c_{12}	$c_{11}+c_{12}$
A_2	c_{21}	c_{22}	$c_{21}+c_{22}$
	$c_{11}+c_{21}$	$c_{12}+c_{22}$	$N=c_{11}+c_{12}$ $+c_{21}+c_{22}$

Se, infine, i matrimoni della Distribuzione « effettiva » si fossero celebrati non già a caso, ma in modo da risultare addirittura *egualmente* numerosi per ogni coppia di modalità, avremmo ottenuto una

distribuzione che potremmo chiamare « indifferente », nella quale i numeri contenuti nei 4 quadranti, che indicheremo con i (indifferente), risultano tutti eguali a $\frac{1}{4} N$ (1):

TAVOLA III

Distribuzione « indifferente »

M \ F	A_1'	A_2'	*Totali*
A_1	$i_{11} = {}^1/_4 N$	$i_{12} = {}^1/_4 N$	$i_{11} + i_{12} = {}^1/_2 N$
A_2	$i_{21} = {}^1/_4 N$	$i_{22} = {}^1/_4 N$	$i_{21} + i_{22} = {}^1/_2 N$
	$i_{11} + i_{21} = {}^1/_2 N$	$i_{12} + i_{22} = {}^1/_2 N$	$N = i_{11} + i_{12} + i_{21} + i_{22}$

Ad esempio, fatto eguale a 1000 il numero dei matrimoni celebrati in Italia nel 1912, distinti a seconda dello stato civile degli sposi anteriormente alle nozze, abbiamo che la distribuzione « effettiva », quella « casuale » e la « indifferente », risultano:

TAVOLA IV

Matrimoni celebrati in Italia nel 1912 distinti a seconda dello stato civile degli sposi (fatto il totale dei matrimoni eguale a mille).

	Distribuz. « effettiva »			*Distribuz. « casuale »*			*Distribuz. « indiffer. »*		
	Nubili	Vedove	Totale	Nubili	Vedove	Totale	Nubili	Vedove	Totale
Celibi	882.21	20.36	902.57	855.37	47.20	902.57	250	250	500
Vedovi	65.50	31.93	97.43	92.34	5.09	97.43	250	250	500
	947.71	52.29	1000.00	947.71	52.29	1000.00	500	500	1000

(1) Questa distribuzione « indifferente » coincide con quella che il BENINI chiama « equa ripartizione ». (Cfr. BENINI, *Gruppi chiusi e gruppi aperti in alcuni fatti collettivi di combinazioni*, in « *Bulletin de l'Institut International de Statistique* », t. XXIII, 2.ème Livraison, Cairo, 1928, pag. 370).

3. L'*indice di attrazione* del BENINI, com'è noto, è dato dalla formola:

$$I = \frac{F_e - F_t}{M_s - F_t} \qquad (2)$$

dove F_e sono le frequenze effettivamente osservate delle coppie *omogame* (ossia: e_{11} oppure e_{22} della distribuzione « effettiva »); F_t sono le frequenze teoriche che si sarebbero ottenute nel caso di assoluta indifferenza di un maschio avente un determinato carattere verso una femmina avente il carattere corrispondente (ossia: c_{11} ovvero c_{22} della distribuzione « casuale »); mentre M_s sta ad indicare il massimo numero di coppie *endogene* che, in seno alla massa, possono formarsi. Così ad esempio nel 1912 (V. Tavola IV), dato che in tutto vi sono solo 902,57 celibi e 947,71 nubili, è evidente che il numero massimo di coppie che possono formarsi fra celibi e nubili, è dato da 902,57. Analogamente, il numero massimo di coppie di vedovi con vedove, è dato da 52,29.

L'indice I varia tra 0 e 1, e starebbe ad indicare con 0 l'assoluta indifferenza e con 1 il massimo d'attrazione. In realtà, però, tale indice, dà una misura di quel complesso di « cause o forze che intervengono nella scelta », e quindi non è indipendente dalle varie proporzioni che possono assumere le due popolazioni di M e di F che vengono poste a fronte. Il BENINI [1]) stesso, difatti, consigliò di calcolare l'indice di attrazione soltanto su quei matrimoni nei quali la scelta può esser *libera*. In tal caso, infatti, l'indice proposto risulta, per così dire, *puro* perchè rimangono costanti le proporzioni numeriche delle popolazioni studiate [2]).

Nel caso della Tavola IV le combinazioni libere o « gruppi aperti », risultano [3]):

---

[1]) BENINI, *Gruppi chiusi e gruppi aperti in alcuni fatti collettivi di combinazioni*, in: « Bulletin de l'Institut International de Statistique », cit.

[2]) Cfr. SAVORGNAN, *La misura dell' endogamia e dell'omogamia*, cit.

[3]) Il ragionamento sarebbe il seguente (V. Tavola IV): se le nubili (947,71), avessero sposato anzitutto tutti i celibi disponibili (902,57), di esse, 42,14 sarebbero state costrette a sposare dei vedovi, dando luogo ad un primo gruppo di combinazioni obbligate.

Se invece le nubili (947,71), non avessero sposato che dei vedovi (97,43), il rimanente di queste (850,28) non avrebbe potuto sposarsi che con dei celibi, dando luogo ad un secondo gruppo di combinazioni obbligate. Determinate

TAVOLA V

Gruppi aperti nei matrimoni di cui alla Tavola IV

M \ F	*Nubili*	*Vedove*	*Totale*
Celibi	31.93	20 36	52.29
Nubili	20.36	31.93	52.29
	52.29	52.29	104.58

4. Il modo di calcolo degli indici proposti dall'ANDREOLI [1]), è il seguente:

Sulle tre distribuzioni ricordate al n. 2 (Cfr. Tavole I, II e III) si può eseguire l'operazione D. Essa consiste nel sottrarre, dalla somma delle frequenze poste sulla diagonale principale sinistra-destra, la somma delle frequenze che si trovano sulla diagonale destra-sinistra, e nel dividere il risultato così ottenuto, per il numero totale delle frequenze N. Indicheremo con D_e il risultato che si ottiene se si opera sulla distribuzione « effettiva »; con D_c quello ottenuto sulla distribuzione « casuale », e con D_i quello che si ricava dalla distribuzione « indifferente ».

Pertanto, usando le notazioni delle tavole I, II e III, avremo:

$$D_e = \frac{(e_{11} + e_{22}) - (e_{21} + e_{12})}{N} \qquad (3)$$

in tal modo le combinazioni obbligate (C—N 850,28; V^i—N 45,14) le combinazioni libere si ricavano per differenza:

C N	882.22	850.28	31.93
V^i V^e	31.93	—	31.93
V^i N	65.50	45.14	20.36
C V^e	20.36	—	20.36

Cfr. BENINI, *Gruppi chiusi e gruppi aperti*, etc., cit.

[1]) In questa Nota ci è sembrato conveniente di modificare alquanto alcune notazioni usate dall'ANDREOLI nel suo lavoro sopra citato. In particolare, abbiamo chiamato « distribuzione effettiva » « causale » e « indifferente » rispettivamente la « Tabella rilevata », « casuale » e « indifferente ». Inoltre abbiamo indicato con φ anzichè con σ l'*indice di sfasamento* (vedi più avanti) allo scopo di non ingenerare confusione con lo *scarto quadratico medio* che, com'è noto, viene universalmente indicato anche con σ.

$$D_c = \frac{(c_{11} + c_{22}) - (c_{21} + c_{12})}{N} \tag{4}$$

$$D_i = \frac{(i_{11} + i_{22}) - (i_{21} + i_{12})}{N} \tag{5}$$

Ora, D_i è sempre, per sua natura, eguale a zero, giacchè nella distribuzione « indifferente », è per definizione:

$$i_{11} = i_{22} = i_{21} = i_{12} \,.$$

D_e e D_c possono invece assumere valori positivi o negativi a seconda che prevalgono, nei due quadri dicotomici dati, le coppie *endogene* $(e_{11} + e_{22}\,; c_{11} + c_{22})$ sulle coppie *endogene* $(e_{21} + e_{12}\,; c_{21} + c_{12})$ o viceversa.

Orbene, in relazione a queste diverse operazioni D che si possono compiere sulle distribuzioni « effettive ». « casuali » o « indifferenti », è possibile definire varii indici atti a caratterizzare la forma che assume in concreto il quadro dicotomico « effettivo ».

La differenza

$$D_c - D_i = j \tag{6}$$

può essere assunta come *indice di irregolarità*, e sta ad indicare che la distribuzione « casuale » si allontana da quella « indifferente » in quanto, o presenta un' eccedenza di coppie *endogene* o un' eccedenza di coppie *esogene;* eccedenze che non sussistono in una distribuzione « indifferente » in cui le combinazioni matrimoniali di sposi con due caratteri alternativi sono tutte egualmente numerose.

La differenza

$$D_e - D_c = \varphi \tag{7}$$

può essere assunta come *indice di sfasamento* e sta ad indicare di quanto la distribuzione « effettiva » si differenzia da quella « casuale ».

Infine, la differenza

$$D_e - D_i = \omega \tag{8}$$

che può anche scriversi:

$$D_e - D_i = D_e - D_c + D_c - D_i \;,$$

diventa in base alla (6) e alla (7):

$$\omega = j + \varphi. \tag{9}$$

ω può essere assunto come *indice di endogamia* o *di omogamia*, e sta ad indicare di quanto la distribuzione « effettiva » si allontana dalla distribuzione « indifferente ». Esso ci dice in sostanza qual' è, sul totale delle coppie considerate, la eccedenza di coppie *endogene* sulle coppie *esogene*, assumendo valore *O* quando questa eccedenza

è nulla (caso della distribuzione « indifferente »), ed il valore + 1, quando invece tutte le frequenze si addensano nelle due sole caselle del quadro dicotomico poste sulla diagonale principale sinistra-destra. È evidente poi che ω può assumere valori negativi nel caso che le coppie *esogene* superano le coppie *endogene*: ed anzi assume il valore — 1 quando queste ultime hanno una frequenza eguale a zero.

5. Esposti così brevemente i metodi di calcolo degli indici dei quali intendiamo occuparci, passiamo a considerare i matrimoni celebrati in Italia nel ventennio 1912-31 distinti a seconda dello stato civile degli sposi anteriormente alle nozze. I dati, fatto eguale a 1000 il numero dei matrimoni d'ogni anno, sono riportati nella seguente Tavola VI. Su di essi sono stati calcolati i varii indici di cui abbiamo accennato, ed i risultati dei calcoli sono esposti nella Tavola VII, nella quale sono anche indicate le frequenze dei « gruppi aperti », per 1000 coppie, in ciascun anno.

Tavola VI

Matrimoni celebrati in Italia dal 1912 al 1931, distinti a seconda dello stato civile degli sposi anteriormente alle nozze

(Cifre proporzionali a 1000 matrimoni)

Anno	C → N	C → V^e	V^i → N	V^i → V^e	Totale
1912	882.21	20.36	65.50	31.93	1000
13	892.57	18.48	59.98	28.97	1000
14	888.86	18.38	62.83	29.93	1000
15	886.64	22.90	73.21	35.25	1000
16	798.37	36.56	104.42	60.65	1000
1917	794.72	35.20	104.49	65.59	1000
18	803.83	29.29	104.75	62.13	1000
19	820.01	22.30	111.78	45.91	1000
20	887.58	22.74	63.91	25.77	1000
21	899.51	21.04	54.51	24.94	1000
1922	900.09	19.02	55.08	25.81	1000
23	899.23	19.97	53.72	27.08	1000
24	900.61	19.75	53.75	25.89	1000
25	899.76	18.21	57.09	24.94	1000
26	899.17	18.05	57.65	25.13	1000
1927	899.98	19.51	56.13	24.38	1000
28	904.48	17.13	55.61	22.78	1000
29	904.57	16.45	56.27	22.21	1000
30	905.42	16.29	56.18	22.11	1000
31	911.55	15.03	53.35	20.07	1000

TAVOLA VII

Anno	Indici di attrazione (BENINI)			Altri Indici (ANDREOLI)									P tu g ap t dei r
	sul totale delle coppie	sui gruppi aperti	sui gruppi chiusi	sul totale delle coppie			sui soli gruppi "aperti"			sui soli gruppi "chiusi"			
	I_t	I_a	I_c	φ_t D_e-D_c	j_t D_c-D_i	ω_t D_e-D_i	φ_a D_e-D_c	j_a D_c-D_i	ω_a D_e-D_i	φ_c D_e-D_c	j_c D_c-D_i	ω_c D_e-D_i	
1912	56.86	22.13	0	10.74	72.09	82.83	22.13	0	22.13	0	89.92	89.92	10
13	57.25	22.11	0	8.90	74.41	83.31	22.11	0	22.11	0	90.83	90.83	9
14	58.06	23.91	0	10.18	73.58	83.76	23.91	0	23.91	0	90.16	90.16	9
15	55.83	21.24	0	11.58	69.20	80.78	21.24	0	21.24	0	88.61	88.61	11
16	54.95	24.78	0	17.84	53.96	71.80	24.78	0	24.78	0	83.15	83.15	19
1917	57.92	30.15	0	19.38	52.68	72.06	30.15	0	30.15	0	82.64	82.64	20
18	61.54	35.92	0	19.75	53.44	73.19	35.92	0	35.92	0	81.53	81.53	18
19	61.18	34.61	0	14.06	59.12	73.18	34.61	0	34.61	0	79.28	79.28	13
20	48.50	6.25	0	8.57	74.10	82.67	6.25	0	6.25	0	90.88	90.88	9
21	50.29	8.48	0	8.61	76.37	84.98	8.48	0	8.48	0	92.63	92.63	9
1922	53.83	15.15	0	8.87	76.31	85.18	15.15	0	15.15	0	92.08	92.08	8
23	53.83	15.11	0	9.31	75.95	85.26	15.11	0	15.11	0	92.55	92.55	9
24	52.99	13.45	0	8.90	76.40	85.30	13.45	0	13.45	0	92.52	92.52	9
25	54.03	15.60	0	8.56	76.38	84.94	15.60	0	15.60	0	91.49	91.49	8
26	54.43	16.40	0	8.62	76.24	84.86	16.40	0	16.40	0	91.33	91.33	8
1927	51.66	11.10	0	8.34	76.53	84.87	11.10	0	11.10	0	91.97	91.97	8
28	53.42	14.16	0	7.86	77.59	85.45	14.16	0	14.16	0	91.64	91.64	7
29	55.03	13.43	0	7.66	77.70	85.36	13.43	0	13.43	0	91.47	91.47	7
30	53.97	15.16	0	7.64	77.87	85.51	15.16	0	15.16	0	91.36	91.36	7
31	53.78	14.36	0	7.00	79.32	86.32	14.36	0	14.36	0	91.76	91.76	7

I dati medesimi, poi, sono stati tradotti sul Grafico I. L'esame di esso, e delle cifre contenute nella Tavola VII, ci consente di fare le seguenti osservazioni:

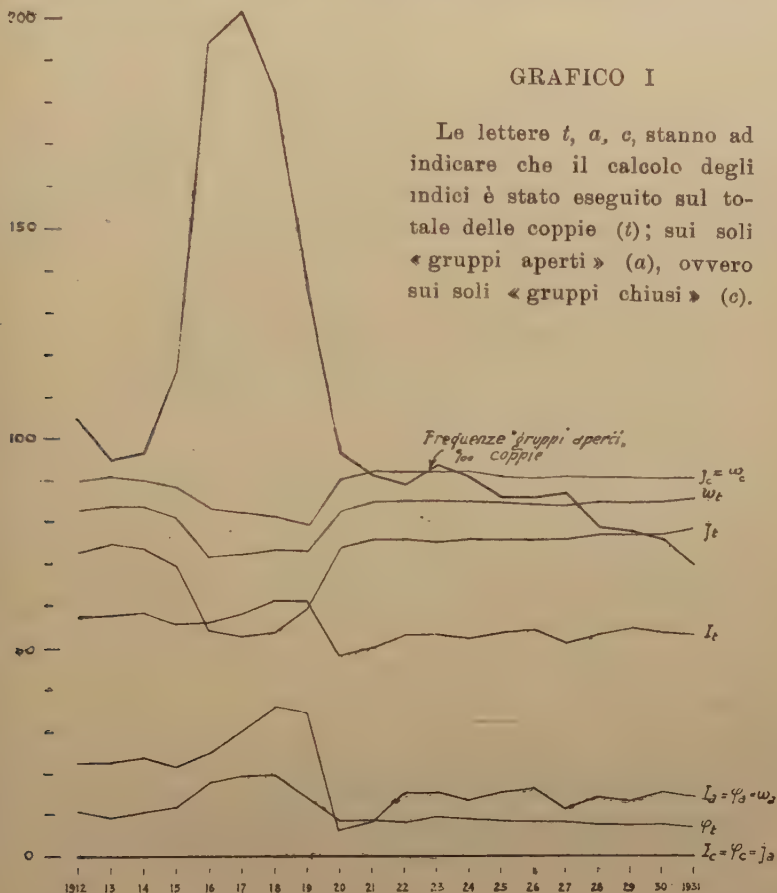
I. *Andamento degli indici per il totale delle coppie.*

a) L'indice di attrazione I_t si eleva notevolmente nel periodo bellico; tocca un massimo di 61.54 nel 1918, per cadere successivamente, nel 1920, ad un minimo di 48.50, e si stabilizza, dal 1922 in poi, intorno a valori che tuttavia sono tutti più bassi dei valori segnati per gli anni prebellici considerati (1912-15).

b) Un andamento pressocchè analogo ad I_t, segue l'*indice di sfasamento* φ_t, che tuttavia sembra subire oscillazioni meno marcate. Esso ci dice perciò che durante la guerra, aumenta la diversità fra la distribuzione «effettiva» e quella «casuale», ossia vi è maggiore attrazione nel nostro caso.

c) L' andamento di j_t è al contrario inverso a quello di I_t e φ_t. Esso ci dice pertanto che nel periodo bellico diminuisce la diversità fra la distribuzione « casuale » e quella « indifferente »: il chè vuol

GRAFICO I

Le lettere *t*, *a*, *c*, stanno ad indicare che il calcolo degli indici è stato eseguito sul totale delle coppie (*t*); sui soli « gruppi aperti » (*a*), ovvero sui soli « gruppi chiusi » (*c*).

dire che diminuiscono sensibilmente le coppie *endogene* della distribuzione « casuale » rispetto alle coppie *esogene* della stessa distribuzione.

d) L' andamento di ω_t sembra seguire quello di j_t, ma con oscillazioni meno marcate. Esso ci dice perciò che durante la guerra diminuisce nella distribuzione « effettiva » l'eccedenza di coppie *endogene* sulle coppie *esogene*, ossia diminuisce l' omogamia della massa dei matrimoni, in quanto si fanno più numerose, proporzionalmente, le coppie *esogene* $(C - V^e;\ V^i - N)$.

II. *Andamento degli indici per i « gruppi aperti ».*

a) La spezzata dell' indice I_a, ha un andamento molto simile, nelle sue linee generali, a quella relativa all' indice I_t: soltanto che le oscillazioni sono più ampie.

b) I valori di φ_a e di ω_a, corrispondono rigorosamente ad I_a. Ciò risulta evidente quando si consideri che nel caso dei gruppi aperti la distribuzione « casuale » coincide con la « indifferente », ossia $D_c = D_i$. Segue che essendo $\varphi = D_e - D_c$; e $\omega = D_e - D_i$, può scriversi:

$$D_e - D_i = \varphi = \omega.$$

Che I_a corrisponda a questi due valori potrebbe facilmente verificarsi tenendo presente uno dei modi con cui può esprimersi il valore di I [1]).

c) Si verifica inoltre $j_a = O$, perchè, coincidendo la distribuzione « casuale » con la « indifferente », $D_c - D_i = j = O$.

III. *Andamento degli indici per i gruppi chiusi.*

a) L'indice I_c è ovviamente eguale a zero, in quanto non può esservi attrazione dove le combinazioni sono obbligate e non *libere.*

b) φ_c risulta anche eguale a zero perchè in tal caso la distribuzione « effettiva » coincide con la « casuale », e perciò $D_e - D_c = \varphi = 0$.

c) j_c ha un andamento pressocchè analogo a j calcolato sul totale delle coppie, ma assume valori assoluti sempre più alti.

d) Nel caso dei gruppi chiusi la distribuzione « effettiva » coincide con la « casuale », ossia $D_e = D_c$. Segue che essendo $j = D_c - D_i$ e $\omega = D_e - D_i$, può scriversi:

$$D_e - D_i = j = \omega .$$

IV. *Frequenza dei gruppi aperti e sua relazione col valore assunto dai varii indici. Interpretazione dell' aumentata attrazione per stato civile nel periodo bellico.*

La frequenza dei gruppi aperti sul totale delle coppie subisce un improvviso, notevolissimo incremento nel periodo di guerra fino a raddoppiarsi quasi nel 1917 rispetto al 1912: ricade nel 1920 ad un

---

[1]) Il valore di I per il totale delle coppie, può infatti porsi sotto la forma indicata nella nota 2 a pag. 73, cioè:

$$I_t = \frac{\varphi_t}{h_a + j_c h_c - j_t}$$

Orbene, nel caso dei gruppi aperti, $h_a = 1$; $h_c = 0$ annullandosi il prodotto $j_c h_c$; j_t (relativo ad un gruppo aperto) è anch' esso eguale a zero (risultando in tal caso $D_c = D_i$), e quindi, in definitiva, risulta $I = \frac{\varphi}{1} = \varphi$.

valore pressocchè eguale a quelli segnati per l'anteguerra, e si abbassa successivamente, salvo lievi oscillazioni, fino al minimo che è toccato proprio nel 1931, ultimo anno da noi considerato.

Questo andamento si può dire che ci dia ragione delle variazioni di quasi tutti gli indici calcolati.

Il variare di I, per quanto appare dall'esame da noi condotto, sembra difatti essere strettamente collegato con la composizione della massa dei matrimoni. Si può dire pertanto che il valore di I dipende notevolmente dalla proporzione numerica delle due popolazioni con caratteri alternativi studiate, in quanto, variando questa proporzione, varia anche il valore di I[1]. Ma l'esame del grafico autorizzerebbe a supporre addirittura che I sia una funzione *direttamente* collegata all'importanza numerica relativa del «gruppo aperto», nel senso che aumentando questo, aumenta, a parità di condizioni, anche il valore di I. Questa ipotesi è confermata dall'analisi [2]) e permette

---

[1]) Cfr. C. Gini e L. Berardinis, *Sulle vaccinazioni antitifiche nell'esercito Italiano durante la guerra*, «Metron», vol. III, n. 3-4, pag. 373 — Cfr. anche Savorgnan, *La misura dell'endogamia* etc., cit. pag. 12.

[2]) Il Prof. Andreoli mi fa infatti osservare che l'indice di attrazione sul totale dei matrimoni, anzicchè nella forma consueta ricordata (Cfr. formola 2 a pag. 66), può esprimersi nella seguente

$$I_t = \frac{\varphi_t}{h_a + j_c h_c - j_t}$$

nella quale φ_t, è l'*indice di sfasamento* calcolato sul totale dei matrimoni; j_t e j_c sono gl'*indici d'irregolarità* calcolati rispettivamente sul totale dei matrimoni e sui soli gruppi chiusi; ed infine h_a e h_c sono le proporzioni, rispetto al totale dei matrimoni, del gruppo aperto e del gruppo chiuso.

Orbene, se si esamina il grafico I, si vede facilmente che (essendo $h_a + h_c = 1$), quando h_a aumenta, diminuisce j_c e più ancora diminuisce il prodotto $j_c \cdot h_c$, perchè si è rimpiccolita anche la massa dei gruppi chiusi h_c. D'altra parte, j_t diminuisce ancora più sensibilmente di j_c, ma, in definitiva, risulta che il denominatore della frazione diminuisce di valore e perciò I aumenta.

Per il 1912, ad esempio, si ha (vedi Tavola VII) : $\varphi_t = 0{,}1074$; $h_c = 0{,}1046$; $h_c = 0{,}8954$ (1—0,1046) ; $j_t = 0{,}7209$, e quindi I_t risulta :

$$\frac{0{,}1074}{0{,}1046 + 0{,}8992 \times 0{,}8954 - 0{,}7209} = 0{,}5688$$

La piccola differenza fra questo valore unitario e quello percentuale riportato nella Tavola VII (56,86) è dovuta alle approssimazioni.

di valutare perciò, col loro giusto peso, le variazioni che subiscono attraverso il tempo gli indici di attrazione calcolati.

Nell'esempio da noi preso in esame, sembra lecito supporre che l'attrazione degli sposi per stato civile è aumentata durante la guerra perchè aumentò l'importanza relativa di coloro che *liberamente* poterono contrarre matrimonio. Infatti, non sembra esservi stata una ragione plausibile per supporre che sia aumentata in effetti, tanto sensibilmente, nel periodo di guerra, la consueta simpatia dei celibi verso le nubili o dei vedovi verso le vedove. Sembra invece logico pensare che essendosi fatto più largo il campo delle combinazioni libere, maggior libero gioco potette avere questa naturale tendenza all'accoppiamento di individui simili.

D'altra parte, cade opportuno osservare che questa *maggiore attrazione* si è manifestata unitamente ad una *minore endogamia* o *omogamia* (nel senso sopra definito), perchè, come si rileva dal grafico *I*, mentre la spezzata dell'indice I_t si innalza durante la guerra, quella relativa ad ω_t, si abbassa. Ciò mostra che l'attrazione, a causa dell'elevarsi delle combinazioni libere, è sensibilmente aumentata non ostante che, nello stesso tempo, sia aumentato proporzionalmente il numero delle coppie *esogene* formate cioè di celibi con vedove o di vedovi con nubili [1]).

V. *Diversità delle oscillazioni dei varii indici.*

Chi osserva il grafico *I* si convince facilmente che l'indice *I*, calcolato sul totale delle coppie, a parte la variazione profonda prodotta dalla guerra, presenta anche molte oscillazioni di lieve entità; ma quasi sempre più ampie di quelle che presentano gli altri indici φ_t, j_t e ω_t. La piccola variabilità di questi ultimi, specie negli anni che vanno dal 1922 al 1931, potrebbe far pensare ad una loro scarsa sensibilità. In realtà, però, bisogna considerare che I_t nei confronti degli altri indici, è di struttura notevolmente più complessa,

---

La formola sopra indicata, quando risulti $h_c \backsimeq 1$ e quindi $h_a \backsimeq 0$, può scriversi:

$$I_t \backsimeq \frac{\varphi_t}{j_c - j_t} .$$

[1]) È forse probabile che la più alta frequenza di coppie *esogene* vedovi-nubili sia stata originata dal fatto che i vedovi, nel periodo di guerra trovarono con le nubili una concorrenza meno attiva di celibi, più giovani, e quindi più facilmente mobilitati.

in quanto è influenzato da molte circostanze unitamente. Difatti, consideriamo per semplicità la forma approssimata con cui può essere espresso I_t (Cfr. nota 2 a pag. 73), quando $h_a \cong 0$ e $h_c \cong 1$:

$$I_t \cong \frac{\varphi_t}{j_c - j_t}$$

che è della forma:

$$r = \frac{a}{b - c}.$$

Ora supponiamo che i valori a, b, c, subiscano variazioni in più o in meno dello stesso ordine di grandezza. Posto che α, β, γ rappresentino gli scarti di a, b, c, ed ε quello di r, avremo:

$$r \pm \varepsilon = \frac{a \pm \alpha}{(b \pm \beta) - (c \pm \gamma)}$$

Il massimo di r sarà dato da

$$r_1 + \varepsilon = \frac{a + \alpha}{(b - \beta) - (c + \gamma)},$$

cioè, quando il numeratore assume il valore massimo ed il denominatore diventa minimo.

Al contrario, il minimo sarà dato da:

$$r_2 - \varepsilon = \frac{a - \alpha}{(b + \beta) - (c - \gamma)},$$

cioè quando il numeratore assume il valore minimo ed il denominatore diventa massimo.

Così, ad esempio, supposto che si abbia $a = 100$; $b = 100$; $c = 90$, e quindi $r = 10$; e gli scarti siano tutti dell'ordine di 1/100, avremo che il massimo di r sarà:

$$r_1 = \frac{100 + 1}{(100 - 1) - (90 + 0.9)} = \frac{101}{8,1} = 12,47$$

ed il minimo:

$$r_2 = \frac{100 - 1}{(100 + 1) - (90 - 0.9)} = \frac{99}{11.9} = 8,32$$

ossia: a piccoli scarti che si verificano per φ_t, j_c, j_t, corrispondono scarti notevolmente più alti per I_t.

Pertanto, l'indice I_t è, per sua natura, più variabile degli altri indici quì considerati, i quali, appunto perchè più elementari, possono

forse in qualche caso opportunamente caratterizzare una determinata popolazione per quanto riguarda le sue specifiche tendenze all'accoppiamento matrimoniale di individui simili.

VI. *Confronto dell' andamento degli indici nello anteguerra e nel dopoguerra.*

È facile osservare (v. Grafico 1) che il comportamento dei tratti delle spezzate relativi agli anni che precedono il conflitto, non è in tutto analogo a quello degli anni che vanno dal 1922 al 1931, periodo nel quale sembra essersi ristabilito un certo equilibrio. Così la frequenza dei gruppi aperti negli anni 1912-15 è sempre più alta di quella registrata nel 22-31; valori in generale più alti assumono anche nell' anteguerra (1912-15) rispetto al dopoguerra (1922-31) φ_t, I_a, φ_a, ω_a, I_t; mentre il contrario sembra verificarsi per gli indici j_t, j_c, ω_c e ω_t.

Orbene, se noi conoscessimo i valori degli indici anche per molti anni antecedenti al 1912 potremmo essere in grado di stabilire se la diversità constatata fra il periodo prebellico ed il periodo postbellico, si conserva immutata anche negli anni più lontani, ovvero è soltanto limitata agli anni intorno al 1912. Sembra verosimile pensare che nel 1911-12, con la guerra libica, si siano determinate (in una misura però molto meno accentuata) quelle stesse circostanze di fatto hanno determinato lo squilibrio rilevato per il periodo bellico. Con ciò non si esclude affatto, naturalmente, che l' attrazione o simpatia dei celibi verso le nubili (o dei vedovi verso le vedove) non possa esser variata da quaranta-cinquanta anni fa ad oggi; chè, anzi, è forse presumibile che un insieme molto complesso di fattori d' indole psicologica, ed anche il mutare, attraverso il tempo, della composizione dei matrimoni, nei quali, il continuo decrescere della mortalità fa indubbiamente diminuire la frequenza relativa dei vedovi, — abbiano determinato delle variazioni notevoli nel fenomeno dell'attrazione matrimoniale per stato civile.

*
* *

Riassumendo le considerazioni fin qui fatte, possiamo dire che il calcolo degli indici proposti dall' ANDREOLI — a parte la loro possibile applicazione per lo studio dell'attrazione matrimoniale — permette di compiere un esame analitico della massa dei matrimoni studiata.

Così, nel periodo da noi considerato, non soltanto risulta, come del resto era stato già messo in luce [1]), che il variare della proporzione

---

[1]) Cfr. i lavori del GINI e del SAVORGNAN già citati.

numerica dei maschi A_1 e A_2 e delle femmine A_1' A'_2, (Cfr. Tav. 1), fa variare anche l'indice di attrazione I del Benini, — ma ancora che questo indice, come apparirebbe dall'esame da noi condotto, tende ad aumentare quando, a parità di condizioni, aumenta la frequenza delle combinazioni libere.

Ne segue che un accrescersi del valore di I, venga esso calcolato sul totale dei matrimoni, o anche sui soli « gruppi aperti », — non sembra potersi, in generale, interpretare sempre come una manifestazione della maggior simpatia che si riserbano, nella scelta matrimoniale, gl'individui simili. Anche quando si considerano soltanto i gruppi aperti, converrebbe sempre tener presente che la frequenza relativa di questi varia per numerose circostanze, e quindi spesso a questo variare dovrebbe, per lo meno in parte, imputarsi l'aumento o la diminuzione dell'indice I e non già, esclusivamente, alla mutata simpatia che si riserbano gli individui simili. Così, nel caso da noi esaminato, è molto probabile che l'attrazione calcolata sui « gruppi aperti » sia fortemente aumentata durante la guerra, perchè facendosi più ampio il « gruppo aperto », maggiori furono le possibilità di incontro o di scelta, e quindi più libero sfogo potette avere la tendenza dell'accoppiamento dei simili.

In sostanza, quindi, sembrerebbe che l'indice I (anche calcolato, ripetiamo, limitatamente ai soli gruppi aperti), dà sempre l'immagine, così per dire, della massa da cui vien tratto, e perciò non può mai prescindersi, per un'esatta interpretazione del fenomeno dell'attrazione matrimoniale, dalle variazioni che la massa stessa può subire nel tempo e nello spazio.

Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva

Nota di **G. Barba**

(Adunanza del dì 7 Aprile 1934-XII)

Sunto. — In questa nota si dà una dimostrazione del:

Teorema. — Un funzionale $\varphi(c)$ di curva continua, semicontinuo inferiormente ed additivo, coincidente con la lunghezza nel caso delle poligonali e soddisfacente alla condizione:

$$\varphi(c_1) = \varphi(c_2)$$

con c_1 e c_2 congruenti, coincide con la lunghezza della curva.

In questa Nota, si mette, inoltre, in rilievo la necessità di una condizione « gruppale » [dovuta alla possibilità di « movimenti »] nel dare una definizione plausibile di lunghezza di curva; e, quindi, il carattere topologico della questione stessa.

In una mia Nota [1]) del 1929, ho dimostrato il seguente:

Teorema: Un funzionale lineare semicontinuo inferiormente di curva, coincidente con la lunghezza nel caso delle linee poligonali, coincide, necessariamente, con la lunghezza ordinaria della curva (lunghezza intesa quale estremo superiore della lunghezza delle poligonali inscritte).

Ho esplicitato in tale Nota, il significato dell'espressione «funzionale lineare»: un funzionale, cioè, soddisfacente alle due proprietà:

1.ª $\quad \varphi(c_1 + c_2) = \varphi(c_1) + \varphi(c_2)$

2.ª $\quad \varphi(c_1) = k(c_2)$

se k è il rapporto di similitudine tra le due curve c_1 e c_2.

Orbene, di recente, lo Scorza-Dragoni [2]), riprendendo il mio lavoro, ha dimostrato il teorema nella ipotesi che sia verificata, anzichè la 2.ª) proprietà, l'altra, da essa dedotta, per $k = 1$ (ammet-

---

[1]) G. Barba — *Sulla definizione di lunghezza di una curva.* Note ed Esercitazioni del Circolo Matem. di Catania.

[2]) G. Scorza-Dragoni — *Un' osservazione sui funzionali additivi e semicontinui di curva.* Boll. dell'Unione Matem. Italiana, del 15-II-XII.

tendo, cioè, che il funzionale assuma valori eguali per curve congruenti) ferme restando le altre ipotesi.

Farò vedere, in questa breve Nota, come si possa dimostrare, in modo molto semplice, il teorema da me enunciato, con la variante apportata dallo SCORZA-DRAGONI.

1. — Sia c una curva per cui il funzionale φ riesca inferiore alla lunghezza l (finita, dapprima) della curva, e sia, quindi, per $0 < \theta < 1$

$$1) \qquad \varphi(c) = \theta l$$

Inscriviamo in c la poligonale $\sum_1^n{}_i \overline{P_{i-1}P_i}$, indi, su un segmento AB, di lunghezza l, a partire da A, stendiamo e la poligonale e la catena $\overline{\gamma}$ di archi insistenti sui lati di questa. Il punto P_n, coincidente con l'estremo di c, sarà a distanza ε da B.

Detta γ la curva costituita da $\overline{\gamma}$ e da P_nB, sarà, per le fatte ipotesi:

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \varepsilon$$

e quindi, grazie alla 1), al limite per n tendente all'infinito, risulterà:

$$\varphi(\gamma) = \theta l ;$$

relazione assurda allorchè si pensi alla semicontinuità di φ.

Supponiamo, ora, la lunghezza di c non più finita.

Sia $\varphi(c)$ finito.

Sarà, ovviamente, per una opportuna poligonale inscritta, di lunghezza l_p:

$$\Sigma\varphi(\widehat{P_{i-1}P_i}) < l_p ;$$

e dovrà, pertanto, esistere, almeno un archetto $\widehat{P_{r-1}P_r}$, per cui risulti:

$$\varphi(\widehat{P_{r-1}P_r}) < \overline{P_{r-1}P_r}$$

dove $\overline{P_{r-1}P_r}$, si può, sempre, supporre finito.

Consideriamo, allora, il numero $\varphi(\widehat{P_{r-1}P_r})$ e fissiamo, p. es.; un semicerchio c_s, di lunghezza data da tal numero.

Riportiamo su una retta, a partire da un generico punto O, successivamente e contiguamente, n semicerchi congruenti a c_s.

Otterremo una curva γ, di lunghezza finita λ, per cui sarà:

$$\varphi(\gamma) \geq n \cdot \overline{P_{s-1}P_s}$$

Passando, ora al limite, per n tendente all' infinito, risulterà — contrariamente alla ipotesi fatta — $\varphi(\gamma)$ infinita.

Resta, così, provato il teorema.

2. In quanto alla necessità, poi, di una condizione «gruppale», da imporre al funzionale, essa è, senz' altro, evidente. Basta pensare al riferimento tra curve situate in regioni distinte. Alcuna definizione di lunghezza di curva, attraverso un funzionale, è, quindi, accettabile ove essa non tenga conto dei « movimenti » della curva stessa. Tra questi, si presentano, sin qui, elementari, le « rotazioni » (intorno a punti al finito o all' infinito).

Ma, dallo stesso esempio di eccezione presentato dallo Scorza, nella citata Nota, risulta che basta limitarsi ad ammettere, *soltanto* il gruppo delle traslazioni, per evitare duplici prolungamenti del funzionale.

Sostanzialmente, dunque, il prolungamento risulta unico, allora ed allora soltanto, quando alle condizioni di additività e semicontinuità, si aggiunga una condizione « di trasporto » atta a confrontare curve situate in regioni diverse.

Tale ultima condizione esprime, del resto, dato il suo carattere gruppale, una condizione di carattere topologico. L' esempio, infatti, dello Scorza, vale, in fondo, ad affermare quanto segue: il funzionale $\varphi(p) = \lambda(p)$ [lunghezza di poligonale p] è da estendere alle curve in modo che, su certe, eccezionali, non abbia valore « lunghezza » Quindi, in luogo del solo cerchio, si potrebbero assumere, addirittura, altre curve c_r sulle quali tale funzionale φ, si prolunga assumendo — col processo dello Scorza — il valore $\mu_r \lambda(c_r)$, essendo le μ costanti arbitrarie.

Ma ciò porta, evidentemente, a supporre il piano non sovrapponibile a sè stesso (a causa della presenza delle curve singolari).

L' esempio dello Scorza, mostra, inoltre, che, anche ammesso il principio di trasporto per le poligonali, tale principio può essere negato per le curve.

Dunque occorre postulare (onde avere la lunghezza ordinaria) l' invarianza del funzionale per curve congruenti, oltre che per poligonali congruenti.

Ma ciò, d' altra parte, si deve pure ammettere, quale immediata estensione.

Sulla prospettiva delle superficie di rotazione

Nota dell' Ing. **Mario Giovanardi**

(Adunanza del dì 7 aprile 1934-XII)

Sunto. — In questa nota si espone un modo abbastanza semplice per determinare la prospettiva lineare conica di una superficie di rotazione considerata come inviluppo di coni ad essa circoscritti lungo i paralleli e della relativa separatrice di ombra, nel caso di una sorgente luminosa all'infinito, avvalendosi per tale scopo del metodo della proiezione centrale e di quello di Monge opportunamente combinati.

La prospettiva di una superficie Σ di rotazione si ottiene determinando la curva (λ) di contatto del cono ad essa circoscritto col vertice nel centro di vista (P); la prospettiva di tale curva, contorno apparente della superficie rispetto al punto (P), rappresenta la prospettiva della superficie Σ [1]).

Considerando quindi, come si suole generalmente, questa superficie come inviluppo di coni ad essa circoscritti lungo i paralleli, occorre determinare i punti in cui questi sono toccati dai piani tangenti ai detti coni e passanti pel centro di vista (P).

Il chiarissimo prof. R. Nicodemi in tre sue note, pubblicate negli Atti del R. Istituto di Incoraggiamento di Napoli rispettivamente negli anni 1916, 1920 e 1923, trattava tale questione semplificandola gradualmente. In questa breve nota, riferendoci in parte ad alcune costruzioni in esse riportate, ci proponiamo di indicarne delle altre, che, riuscendo di facile interpretazione, offrono notevoli semplificazioni nell'esecuzione di disegni inerenti alla suddetta rappresentazione.

Per tale scopo al metodo della proiezione centrale trattato direttamente si è creduto preferire una opportuna combinazione di esso e di quello del Monge, immaginando perciò la superficie Σ riferita a

---

[1]) Si sono indicati con lettere maiuscole i punti, con lettere minuscole le rette, e propriamente tali elementi nello spazio con queste lettere chiuse in parentesi; le loro proiezioni con le stesse lettere senza parentesi e con o senza apici; gli elementi dei piani ribaltati con lettere affette da indici numerici. Gli elementi di fuga sono indicati con le lettere F, f, secondo che si tratta di punto o di retta.

due piani: π, σ, convenientemente scelti, quali piani di proiezioni ortogonali — π primo piano di proiezione o piano orizzontale, σ secondo piano di proiezione o piano verticale —, la linea di terra o asse di proiezione essendo la loro comune intersezione. Si sono supposte quindi determinate le proiezioni ortogonali (λ', λ'') su di essi della curva (λ), e poi col metodo della proiezione centrale da queste si è dedotta λ, prospettiva della superficie Σ.

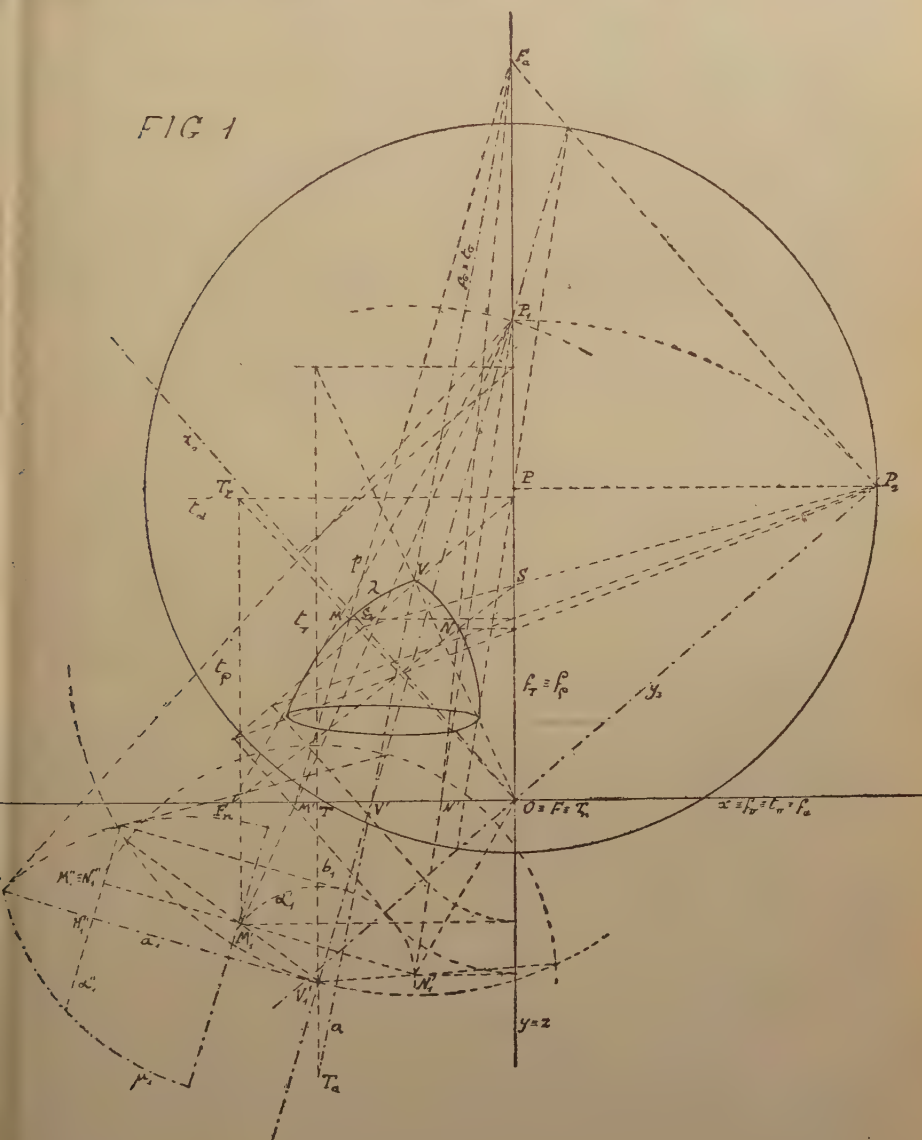
Considereremo dapprima il caso in cui l'asse (a) della superficie Σ, di noto meridiano (μ), sia comunque disposto rispetto agli elementi fondamentali, quadro e centro di vista (P), e poi quello in cui detto asse sia parallelo al quadro. In questo secondo caso determineremo altresì la prospettiva della separatrice di ombra secondo una direzione assegnata dei raggi luminosi.

Primo caso

La superficie Σ di rotazione, della quale vogliamo costruire la prospettiva lineare, sia determinata dal suo asse $(a) \equiv F_a\, T_a$, — F_a punto di fuga, T_a traccia —, comunque situato rispetto agli elementi di riferimento, — quadro e centro di vista (P), individuato dal cerchio di distanza di raggio eguale a $(P)\, P$, essendo P la proiezione ortogonale di (P) sul quadro — e dal meridiano (μ). Determineremo anzitutto i punti della curva cercata (λ) sopra un qualunque parallelo (α) di Σ (Fig. 1).

Circoscriviamo perciò a Σ il cono (χ) lungo il parallelo (α); conducendo a questo cono i piani tangenti da (P), i punti (M, N) ove i lati di contatto si appoggiano ad (α) sono i punti di (λ) su (α). Costruendo quindi la sezione del cono (χ) col piano π ed i suoi raggi passanti pei punti ove essa è toccata dalle tangenti condotte da (P), determiniamo i punti (M', N') ove gli stessi raggi, prolungati se occorre, incontrano il cerchio eguale al corrispondente parallelo (α) descritto nel piano π col centro nel punto (V') ove lo stesso piano è incontrato dall'asse (α). Se da (M', N') si suppongono elevate le perpendicolari e staccati su di esse a partire da (M', N') segmenti equipollenti alla distanza di (α) da π, gli estremi (M, N) opposti a (M', N') di questi segmenti saranno i due punti di (λ) appartenenti al parallelo (α). I punti (M, N) sono in simmetria ortogonale rispetto al piano meridiano che passa per (P), cioè al piano proiettante (a), rispetto al quale piano è perciò in simmetria ortogonale la curva (λ). Le immagini M, N di tali punti, cioè i punti d'incontro dei raggi proiettanti (PM), (PN) col quadro, appartengono alla curva λ, prospettiva della superficie Σ di rotazione considerata.

Per ottenere detti punti riferiremo Σ a due piani di proiezioni

ortogonali: π, σ, scegliendo per π, primo piano di proiezione, il piano proiettante perpendicolare all'asse (a) e rappresentato perciò da retta di fuga e traccia, $f_\pi \equiv t_\pi$, coincidenti con l'antipolare di F_a rispetto

al cerchio di distanza, e per σ, secondo piano di proiezione, il piano proiettante l'asse e definito perciò da $f_\sigma \equiv t_\sigma \equiv F_a\, T_a$. Il piano σ, contenendo l'asse (a) di Σ, è un piano meridiano, e quindi contiene un meridiano (μ) di Σ. I due piani π e σ si tagliano secondo un raggio proiettante proiettato nel punto V', essendo V' l'immagine del punto (V') d'incontro dell'asse (a) col piano π; tale punto si può considerare

appartenente alla retta (i) di immagine FT, intersezione del piano $\tau \equiv f_\tau t_\tau$, condotto per l'asse (a) normalmente al quadro, col piano π.

Eseguiamo indi due ribaltamenti, dei quali il primo non richiede alcuna costruzione specifica, in quanto che immaginiamo il piano σ con l'asse (a) ed il meridiano (μ) ribaltato sul piano π, e poi questo ribaltato sul quadro. Sarà P_1 il ribaltamento del centro di vista, punto appartenente alla comune intersezione dei piani π e σ, la retta b_1 condotta da T parallelamente a P_1F il ribaltamento di (i), cui appartiene il punto (V'), e la proiezione V'_1 del punto V' fatta da P_1 su b_1 il ribaltamento del punto (V') in cui (a) incontra π. Si elevi in V'_1 la perpendicolare a_1 alla $P_1V'_1$ ed intorno ad essa si descriva il meridiano μ_1 della superficie Σ, e quindi, come in proiezione di Monge, secondo le operazioni spaziali innanzi esposte, applicate ai diversi paralleli, si determini la proiezione ortogonale sul piano π (ribaltato) della curva (λ) di contatto della superficie di rotazione col cono circoscritto di vertice (P), considerando $P_1V'_1$ come linea di terra.

Siano M'_1, N'_1 le proiezioni ortogonali su π (ribaltato) di due punti della curva (λ) appartenenti al parallelo (α) distante da π di $V_1'H_1''$; si proiettino da P_1 su f_π in M', N'; saranno M', N' le immagini delle proiezioni ortogonali su π di due punti (M, N) di (λ). Per trovare le prospettive M, N dei punti (M, N) osserviamo che questi devono stare sulle parallele ad (a) condotte dai punti (M', N') di π e ad una distanza da π eguale a $V_1'H_1''$.

Varie quindi sono le costruzioni per determinare i punti M, N, ed indifferentemente potremo avvalercene, secondo l'opportunità del disegno. Accenniamo a tre di esse, distinte l'una dall'altra, che nella Fig. 1 si vedono applicate per la determinazione di detti punti.

1ª Mediante il ribaltamento del piano principale di profilo si è determinata la traccia t_α del piano del parallelo (α), mentre la retta di fuga f_α coincide con f_π, essendo tale piano parallelo a π, e quindi condotta pel punto (M') la retta (p) parallela ad (a), che in immagine è rappresentata da $F_a M'$, nel punto d'incontro di questa col piano $f_\alpha t_\alpha$ si è ottenuta la prospettiva M richiesta del punto (M). Per determinare quindi M si è fatto passare per la (p) il piano ρ parallelo al piano τ, e definito perciò da $f_\tau t_\rho$, l'incontro della FT_r — immagine della intersezione di detto piano ρ col piano del parallelo (α) — con la retta $F_a M'$ determina il punto M.

2ª Riferendo i punti di (λ) appartenenti ai singoli paralleli ad un sistema di tre assi ortogonali, di cui l'uno (x) coincidente con t_π, traccia del piano π, e (y, z) incidenti con esso in (0), punto del piano π e del quadro, e situati nel piano principale di profilo, con semplici costruzioni intuitive se ne ricavano le immagini. Nella Fig. 1 tali

costruzioni si vedono adottate per la determinazione dei punti M, N, prospettive dei punti (M, N) di (λ) appartenenti al parallelo (α).

3ª Questa costruzione si è eseguita per la determinazione del punto N. Sull'asse (z) appartenente al piano principale di profilo e parallelo ad (a), a partire dal punto (O) e nel senso verso il piano del parallelo (α) si è tagliato un segmento eguale alla distanza tra π e detto piano, indi l'estremo (S) di questo segmento si è proiettato parallelamente alla congiungente il punto (N') col punto (O) sulla parallela ad (a) condotta pel punto (N'), ottenendosi così il punto (N). Il quadrilatero $(SNN'O)$ è un rettangolo. Nella Fig: 1 tali costruzioni spaziali applicate agli elementi rappresentati in immagini hanno determinato il punto N.

Secondo caso

La superficie Σ di rotazione considerata, di noto meridiano (μ), abbia l'asse (a) parallelo al quadro e passante pel punto (O) della retta (b) normale al quadro. La retta a condotta pel punto O della PT_b, immagine della retta (b), determina l'immagine dell'asse (a).

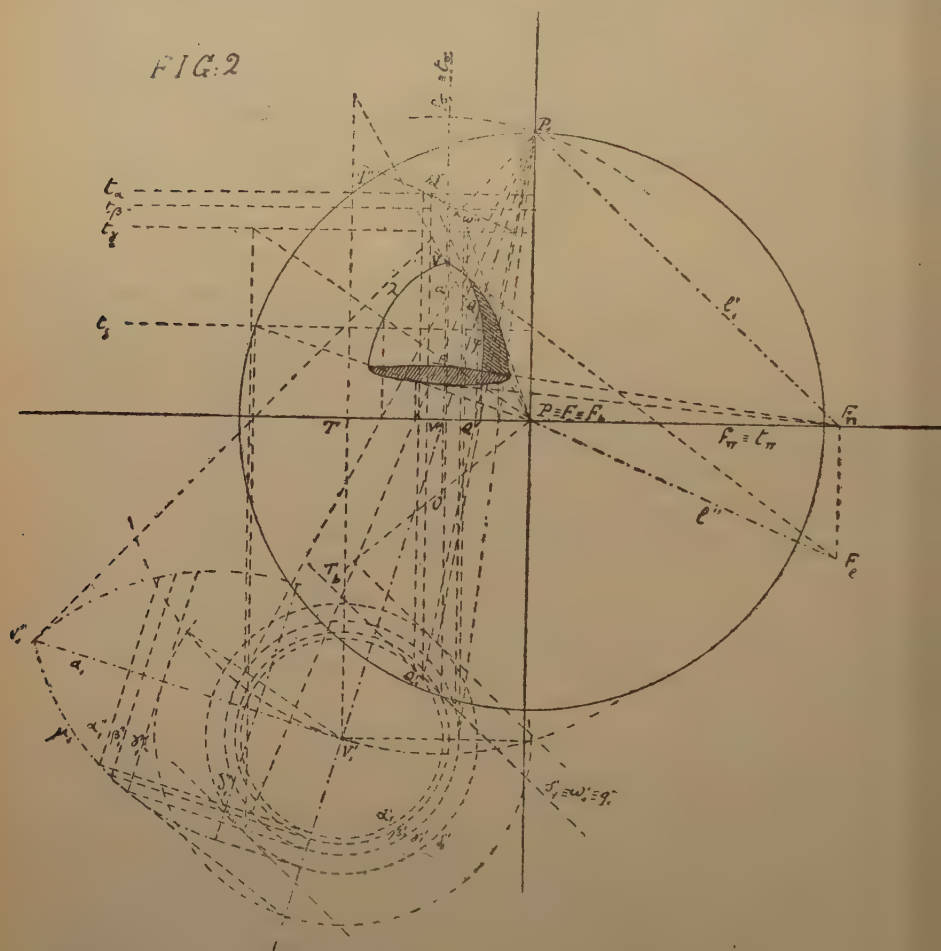
Con metodo identico a quello esposto nel primo caso se n'è determinata la prospettiva, che, per la particolare posizione dell' asse, ha richiesto costruzioni più semplici ed immediate, che ci asteniamo dal ripetere, vedendosi eseguite integralmente nella Fig: 2.

Assegnato F_l, punto di fuga dei raggi luminosi, si è determinata altresì la prospettiva della separatrice di ombra sulla superficie Σ, cioè l'immagine φ della curva (φ) secondo la quale Σ è toccata dal cilindro ad essa circoscritto ed avente le generatrici nella direzione dei raggi luminosi.

Si è applicato perciò il cosiddetto metodo delle sezioni, che viene comunemente usato, specialmente nei corsi di Architettura, quando è facile costruire le proiezioni di un sistema di linee delle superficie, come è il caso delle superficie di rotazione, sulle quali si hanno paralleli, che si proiettano ortogonalmente in cerchi ad essi eguali sopra un piano perpendicolare all'asse della superficie considerata.

Per semplificazione di disegno, nell'applicazione di tale metodo, si è creduto opportuno usare ancora simultaneamente il metodo della proiezione centrale e quello di Monge, considerando il quadro come secondo piano di proiezione ed il piano $\pi \equiv f_\pi \equiv t_\pi$ passante pel centro di vista (P) e perpendicolare all'asse (a), piano di orizzonte, come primo piano di proiezione, ed immaginando poi questo ribaltato sull'altro intorno alla linea di orizzonte f_π, che è anche linea di terra [1]).

[1]) Nella proiezione di Monge comunemente si usa ribaltare il secondo piano di proiezione sul primo, che costituisce il piano di rappresentazione

La superficie Σ trovasi disposta nel secondo diedro, mentre il centro di vista (P), punto del primo piano di proiezione, nel primo diedro. Il segmento $V'_1 T$ indica la distanza dell'asse (a) dal secondo piano di proiezione, mentre PP_1, raggio del cerchio di distanza, la distanza del centro di vista (P) dallo stesso piano. La congiungente

PF_l è la seconda proiezione, l'', del raggio luminoso passante pel centro di vista (P), mentre $P_1 F_n$ ne è la prima, l'_1.

Mediante il ribaltamento occorso per la determinazione della prospettiva della superficie Σ, come nel primo caso, si sono disegnate

---

o foglio di disegno; per uniformarci al metodo della prospettiva centrale in cui il piano di rappresentazione in generale è verticale, abbiamo ribaltato il primo sul secondo piano di proiezione.

le prime proiezioni di un certo numero di paralleli ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$) e le tracce verticali dei piani di detti: $t_\alpha, t_\beta, t_\gamma, t_\delta, \ldots$

Secando detta superficie con una serie di piani paralleli alla direzioue luminosa (l) e normali al primo piano di proiezione, si sono determinate le sezioni (ω_i) da essi prodotte in Σ, ed a queste si sono condotte le tangenti (q_i) parallele ad (l), individuando così il cilindro circoscritto alla superficie Σ. I primi punti di contatto, procedendo nel senso di propagazione della luce, di dette tangenti con le sezioni considerate appartengono quindi alla curva (φ), secondo la quale Σ è toccata dal cilindro ad essa circoscritto con le generatrici parallele ad (l), e costituiscono i punti di ombra propria, mentre le eventuali ulteriori intersezioni con le sezioni stesse darebbero luogo a punti di ombra autoportata.

Nella Fig. 2 si sono eseguite integralmente le costruzioni inerenti alla determinazione di un punto (Q) della curva (φ), e propriamente di quello appartenente alla sezione (ω) prodotta nella superficie Σ dal piano secante di traccia orizzontale s'_1 parallela ad l'_1. Di tale punto si sono determinate le due proiezioni Q'_1, Q'' rispetto ai piani di proiezione considerati, ed indi la prospettiva Q nell'incontro col quadro, secondo piano di proiezione, della congiungente (PQ), cioè nella traccia verticale della (PQ).

La prospettiva della curva (φ) è stata inoltre completata con la determinazione di altri punti notevoli ricavati direttamente col metodo della proiezione centrale, come rilevasi dal disegno stesso.

Ancora sulla risoluzione numerica dell'equazione $\sum_1^n i x^i = k$.

Nota del Prof. **Enrico Lenzi**

(presentata nell' adunanza del dì 7 aprile 1934 - XII)

Sunto. — L' A. considera l' equazione $\sum_1^n i x^i = k$ ove $k > n$ ed estende i metodi ed i risultati di una Nota precedente.

1. In una precedente Nota abbiamo indicato un procedimento per risolvere con sufficiente approssimazione, l'equazione:

$$x + x^2 + \ldots\ldots + x^n = k \qquad (1)$$

ove k è numero reale positivo minore di n, e quindi $o < x < 1$.

Questa equazione che ha particolare interesse in matematica finanziaria, quando, posto $x = 1/(1 + y)$, y indichi il tasso annuo di interesse e k sia il valore attuale di una annualità certa di durata n, è stata oggetto di studio da parte di molti Autori, e qui citiamo Baily, Achard, Muraï, Hardy, Amoroso, Boggio, Cantelli, Dell' Agnola. Però tutti coloro che si occuparono di questo problema, proponendo convenienti metodi per la risoluzione, mirarono sopratutto alla particolare applicazione finanziaria e quindi si riferirono, quasi sempre, al caso che y vari fra i valori che più comunemente può assumere un tasso annuo di interesse.

Negli esempi che accompagnano la nostra Nota abbiamo messo in evidenza come il procedimento da noi indicato abbia il pregio d valere qualunque siano i valori di n (intero) e di y. Mostreremo adesso come lo stesso procedimento, lievemente modificato, possa servire anche alla risoluzione numerica della (1), ove sia $k > n$, equazione anche questa di notevole interesse per le applicazioni e che pure non è stata studiata da nessuno degli Autori citati, nè, a quanto ci consta da altri.

2. Per comodità di notazione ci limitiamo a considerare l' equazione della forma (1) e di grado $n - 1$, che, ponendo $x = 1 + y$, si può scrivere:

$$1 + (1 + y) + \ldots . + (1 + y)^{n-1} = h \qquad (2)$$

ove $h > n$. Dato che $y = 0$ non verifica la (2), essa può essere scritta in una delle due forme equivalenti:

$$\frac{(1+y)^n - 1}{y} = h \qquad ; \qquad y = \frac{(1+y)^n - 1}{h} = f(y). \qquad (3)$$

Indicheremo anche qui con $s(y)$ il primo membro della (2), e posto $a(y) = s(y)(1+y)^{-n}$ risulta, come prima:

$$y = \frac{1}{a(y)} - \frac{1}{s(y)}. \qquad (4)$$

Per $y \geq 0$ la $s(y)$ è funzione crescente di y, che per $y = 0$ assume il valore n e per y tendente a $+\infty$ tende a $+\infty$; dall'essere $h > n$ segue che la radice reale della (2) è unica ed è positiva. Ma, a differenza di quanto avveniva quando era noto il valore di $a(y)$ e si trattava di determinare la radice j dell'equazione $a(y) = k$, se j_0 è un valore approssimato per eccesso (o per difetto) della radice j dell'equazione $s(y) = h$ e si pone $j_1 = f(j_0)$, non si può più affermare che j_1 è più approssimato ad j di j_0. Se $j_0 > j$ si ha infatti:

$$j_0 = \frac{(1+j_0)^n - 1}{s(j_0)} < \frac{(1+j_0)^n - 1}{h} = j_1$$

e quindi $j_1 > j_0 > j$, cioè il noto metodo di iterazione non è applicabile.

Se però si usa il metodo, da noi indicato, di usare la (4) anzichè la (3) si ha:

$$j_1 = \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{h} < \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{s(j_0)} = j_0 \quad ; \quad j_1 = \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{h} > \frac{1}{a(j)} - \frac{1}{h} = j$$

e quindi $j_0 > j_1 > j$. Usando con iterazione questo procedimento, si ottiene la successione $j_0 > j_1 > j_2 > \ldots.$ che ha per limite j. Essa però converge ad j molto lentamente.

Es.: Sia $h = 56{\cdot}085$, $n = 30$, $j_0 = 0{\cdot}05$. Risulta:

$$= 0{\cdot}047221, \quad j_2 = 0{\cdot}045175, \ldots, \quad y_6 = 0{\cdot}041307, \quad y_7 = 0{\cdot}040921, \ldots.$$

e, come si vede, la convergenza al valore esatto $j = 0{\cdot}04$ è molto lenta

Oss.: L'analogo procedimento usato per la risoluzione dell'equazione $a(y) = 17{\cdot}292$ ed $n = 30$ dava già per j_4 il valore $0{\cdot}040071$ approssimato a meno di $0{\cdot}0001$ al valore esatto $j = 0{\cdot}04$.

3. Per l'equazione di cui ci occupiamo si può indicare un procedimento che dà una successione la quale converge meno lentamente

e in qualche caso, come sarà indicato, molto rapidamente alla radice incognita.

La (3) si può infatti scrivere:

$$1 + y = \sqrt[n]{1 + hy} = \varphi(y)$$

Se ${}_0j$ è valore approssimato per eccesso della radice incognita j e si pone:

$$1 + j_1' = \varphi(j_0) = \sqrt[n]{1 + hj_0} \qquad (5)$$

risulta

$$1 + j_1' > \sqrt[n]{1 + jh} = 1 + j \quad ; \quad 1 + j_1' < \sqrt[n]{1 + j_0 s(j_0)} = 1 + j_0$$

e quindi $j_0 > j_1' > j$. Analogamente, posto in generale $1 + j'_r = \sqrt[n]{1 + hj'_{r-1}}$ ove $r = 0, 1, 2, \ldots$ si ha:

$$j_0 > j_1' > j_2' > \cdots$$

e la successione tende, come è facile osservare, al limite j.

Alla stessa conclusione si perviene se j_0 è approssimato per difetto.

Riprendendo ad es. l'equazione $s(y) = 56{\cdot}085$. $n = 30$ ed $j_0 = 0{\cdot}05$ risulta:

$j_1' = 0{\cdot}045544$, $j_2' = 0{\cdot}043178$, $j_3' = 0{\cdot}041856$, $j_4' = 0{\cdot}041096$, $j_5' = 0{\cdot}040651, \ldots$

Il confronto dei risultati mette già in evidenza come il nuovo procedimento sia da preferire al precedente. Ma esso riesce ancora più vantaggioso quando si posseggono tavole, come quelle ad es. del Köhler, che contengono i logaritmi di Gauss. Mediante questi logaritmi il calcolo dei successivi valori della successione riesce abbastanza rapido: tanto più rapido quando il logaritmo decimale (Log) di h abbia caratteristica non minore di 5, nel qual caso Log m e Log $(1 + m)$ hanno le prime cinque cifre decimali in comune.

Si consideri ad es. l'equazione $s(y) = 960799$ di grado 7. Un confine superiore della radice incognita si può ottenere mediante la nota relazione fra media aritmetica e media geometrica di più numeri assoluti. Si ha allora:

$$\frac{1 + (1+y) + \ldots + (1+y)^{n-1}}{n} > \sqrt[n]{(1+y)^{1+2+\ldots+(n-1)}} = \sqrt[n]{(1+y)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = (1+y)^{\frac{n-1}{2}}$$

e quindi

$$y < \sqrt[n-1]{\left(\frac{h}{n}\right)^2} - 1. \qquad (6)$$

Il secondo membro indica dunque un valore approssimato per eccesso della radice incognita. Ora si ha $\text{Log}\, h = 5{\cdot}98263$, $\text{Log}\, 8 = 0{\cdot}90309$:

a $\dfrac{2(\text{Log}\, h - \text{Log}\, n)}{n-1} = 1{\cdot}45130$ della colonna C corrisponde nella col. A:

$$1{\cdot}43567 = \text{Log}\, m_1$$

a $\dfrac{\text{Log}\, m_1 + \text{Log}\, h}{n} = 0{\cdot}92754$ della colonna C corrisponde nella col. A:

$$0{\cdot}87293 = \text{Log}\, m_2$$

a $\dfrac{\text{Log}\, m_2 + \text{Log}\, h}{n} = 0{\cdot}85895$ della colonna C corrisponde nella col. A:

$$0{\cdot}79427 = \text{Log}\, m_3$$

a $\dfrac{\text{Log}\, m_3 + \text{Log}\, h}{n} = 0{\cdot}84711$ della colonna C corrisponde nella col. A:

$$0{\cdot}78050 = \text{Log}\, m_4$$

a $\dfrac{\text{Log}\, m_4 + \text{Log}\, h}{n} = 0{\cdot}84539$ della colonna C corrisponde nella col. A:

$$0{\cdot}77849 = \text{Log}\, m_5$$

a $\dfrac{\text{Log}\, m_5 + \text{Log}\, h}{n} = 0{\cdot}84514$ corrisponde il numero $7{\cdot}0006$ e quindi il valore $j_5' = 6{\cdot}0006$ che è molto approssimato al valore esatto $j = 6$.

Generalmente per valori di j non molto piccoli, il valore fornito dalla (6) è molto discosto dal valore esatto. Un valore molto più approssimato, e del quale ci serviremo per l' uso del metodo che sarà indicato nel seguito, è quello che si ottiene dal valore fornito dal secondo membro della (6) ed applicando la (5).

Qualora, procedendo così, il logaritmo decimale di hj_0 abbia caratteristica non minore di 3, il metodo di approssimazioni successive ora indicato dà buoni risultati.

Così ad es. si abbia $s(y) = 29524$, $n = 10$; $j_0 = 4{\cdot}90405$. Risulta:

$$j_1 = 2{\cdot}2815\,, \quad j_2 = 2{\cdot}0398\,, \quad j_3 = 2{\cdot}0059\,, \quad j_4 = 2{\cdot}0008\,, \ldots.$$

ed il valore esatto è $j = 2$.

Altro esempio. Sia $s(y) = 6648{\cdot}52$, $n = 10$, $j_0 = 0{\cdot}842645$. Risulta:

$$j_1 = 0{\cdot}53965\,, \quad j_2 = 0{\cdot}51295\,, \quad j_3 = 0{\cdot}50183\,, \quad j_4 = 0{\cdot}50027\,, \ldots.$$

ed il valore esatto è $j = 0{\cdot}50$.

Per le applicazioni finanziarie ove j é molto piccolo, si può usare il metodo precedente solo per determinare il valore j_1; e partendo da questo valore, col procedimento che ora indicheremo, analogo a quello di cui ci siamo occupati nella Nota precedente, si potranno ottenere risultati molto approssimati.

4. Anche qui si consideri la funzione:

$$[s(y)]^r a(y) = [s(y)]^{r+1}(1+y)^{-n}$$

la cui derivata rispetto ad y è

$$-n[s(y)]^{r+1}(1+y)^{-(n+1)} + (r+1)[s(y)]^r(1+y)^{-n}\frac{ny(1+y)^{n-1}-[(1+y)^n-1]}{y^2}$$

che con facili trasformazioni può essere scritta

$$\frac{[s(y)]^r a(y)}{y(1+y)}\left\{-ny+(r+1)\left[\frac{n}{a(y)}-(1+y)\right]\right\}$$

e risulta positiva se

$$(r+1)\left[\frac{n}{a(y)}-(1+y)\right]>ny$$

Ma, per essere $y>0$, risulta

$$n>1+(1+y)^{-1}+\ldots .+(1+y)^{-(n-1)}=a(y)(1+y)$$

e quindi l'espressione che figura nelle parentesi quadre della relazione precedente è positiva; per cui essa si può scrivere

$$r+1>\frac{ny}{\dfrac{n}{a(y)}-(1+y)}=\mathbf{A}(y)$$

La funzione $\mathbf{A}(y)$ è decrescente; il numeratore della sua derivata infatti, dopo convenienti trasformazioni, può essere scritta

$$\frac{n^3y^2}{[1-(1+y)^{-n}]^2}\left\{(1+y)^{-(n+1)}-\left[\frac{1-(1+y)^{-n}}{ny}\right]^2\right\}$$

Ma è

$$\frac{(1+y)^{-1}+(1+y)^{-2}+\ldots .+(1+y)^{-n}}{n}>\sqrt[n]{(1+y)^{-1-2\ldots-n}}=$$

$$=\sqrt[n]{(1+y)^{-\frac{n(n+1)}{2}}}=(1+y)^{-\frac{n+1}{2}}$$

e quindi

$$\frac{1-(1+y)^{-n}}{ny} > (1+y)^{-\frac{n+1}{2}} \quad ; \quad (1+y)^{-(n+1)} - \left[\frac{1-(1+y)^{-n}}{ny}\right]^2 < 0$$

Fissato allora un valore y_0, per ogni $y \lesseqgtr y_0$ sarà $\Lambda(y) \gtrless \Lambda(y_0)$ e se $\rho(y_0) = \Lambda(y_0) - 1$ sarà $\rho(y_0) \lesseqgtr \Lambda(y) - 1$; per cui la funzione $[s(y)]^{\rho(y_0)} a(y)$ per ogni $y < y_0$ è decrescente, mentre per ogni $y > y_0$ è crescente, e nel punto y_0 ammette un minimo.

Ciò premesso, se j_0 è valore approssimato per eccesso di j e $\rho = \Lambda(j_0) - 1$ sarà

$$[s(j_0)]^\rho a(j_0) < [s(j)]^\rho a(j)$$

e quindi, tenendo presente che $s(j) = h$,

$$\frac{1}{a(j)} < \left[\frac{h}{s(j_0)}\right]^\rho \frac{1}{a(j_0)}$$

e perciò

$$j_1'' = \left[\frac{h}{s(j_0)}\right]^\rho \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{h} > \frac{1}{a(j)} - \frac{1}{h} = j \tag{7}$$

cioè anche j_1'' è approssimato per eccesso ad j.

Con considerazioni analoghe a quelle della Nota precedente è facile vedere che $\rho > 0$. Ma allora, dato che $s(y)$ è funzione crescente di y ed $j < j_0$ sarà $h < s(j_0)$ e quindi $\left[\frac{h}{s(j_0)}\right]^\rho < 1$, per cui

$$\left[\frac{h}{s(j_0)}\right]^\rho \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{h} < \frac{1}{a(j_0)} - \frac{1}{h}$$

Ma il secondo membro indica il valore j_1 che si ottiene operando su j_0 col metodo indicato al n. 3., e, come si è visto, $j_0 > j_1 > j$ e si conclude che j_1'' è ancora più approssimato ad j di j_1 e quindi di j_0.

5. Se in conformità di quanto si è detto prima, si pone

$$1 + j_0 = \sqrt[n-1]{\left(\frac{h}{n}\right)^2} \quad , \quad 1 + j_1 = \sqrt[n]{1 + hj_0} \tag{8}$$

col calcolo per logaritmi si trova $\text{Log}\,(1 + j_0)$ e mediante i logaritmi di Gauss, $\text{Log}\, j_0$, $\text{Log}\,(1 + hj_0)$ e quindi $\text{Log}\,(1 + j_1) = \frac{1}{n} \text{Log}\,(1 + hj_0)$ e infine $\text{Log}\, j_1$.

Ora si osservi che da

$$1 + j_1 = \sqrt[n]{1 + hj_0} \quad ; \quad 1 + j_1 = \sqrt[n]{1 + j_1 s(j_1)}$$

risulta

$$\frac{h}{s(j_1)} = \frac{j_1}{j_0} \; ; \; s(j_1) = h\frac{j_0}{j_1} \; ; \; a(j_1) = s(j_1)(1 + j_1)^{-n} = h\frac{j_0}{j_1}(1 + hj_0)^{-1}$$

la prima parte della (7) ove al posto di j_0 si scriva j_1, ci dà

$$j_2'' = \frac{1}{h}\left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{\rho+1}(1 + hj_0) - \frac{1}{h} = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{\rho+1}(1 + hj_0) - 1\right] \tag{9}$$

e $\rho + 1$ risulta espresso da

$$\rho + 1 = \frac{nj_1}{\frac{n}{h}\frac{j_1}{j_0}(1 + hj_0) - (1 + j_1)} = \frac{hj_1}{\frac{j_1}{j_0}(1 + hj_0) - (1 + j_1)\frac{h}{n}}$$

Ma allora, applicando al valore j_2'' espresso dalla (9) il procedimento di iterazione indicato prima, si può porre

$$1 + j_3'' = \sqrt[n]{1 + hj_2''} = \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{\frac{\rho+1}{n}}\left(1 + hj_0\right)^{\frac{1}{r}}$$

e si à infine la formula, notevole anche per semplicità, che dà un valore molto approssimato ad j:

$$j_3'' = \left(\frac{j_1}{j_0}\right)^{\frac{\rho+1}{n}}(1 + j_1) - 1 \tag{10}$$

ove

$$\frac{\rho + 1}{n} = \frac{j_1\frac{h}{n}}{\frac{j_1}{j_0}(1 + hj_0) - (1 + j_1)\frac{h}{n}}$$

È interessante rilevare che per l'uso di questa formula occorrono solo i logaritmi di $j_0, j_1, 1 + hj_0, 1 + j_1, \frac{h}{n}$ che si posseggono già, essendo serviti alla determinazione di j_1.

Qui si indicano pochi risultati che mettono in evidenza il grado di approssimazione a cui si perviene con l'uso della formula (10; in tutte j_0 ed j_1 si sono ottenuti con le (8).

n	h	j_0	j_1	j''_3	j
10	12·5778	0·05229	0·05184	0·05000	0·05
30	113·283	0·09596	0·08595	0·08002	0·08
30	1181·87	0·28834	0·21467	0·20009	0·20
40	259·057	0·10054	0·08593	0·08005	0·08
50	84·5794	0·02169	0·02105	0·02000	0·02
80	971·229	0·06524	0·05344	0·05003	0·05
100	312·232	0·02327	0·02135	0·02001	0·02

Anche qui si può trovare un confine superiore dell' errore che si commette assumendo j_3'' come valore di j. Extrapolando fra i reciproci dei valori della funzione $1: s(y)$ che per $y=j$ e per $y=j_1$ sono noti e per $y=j_3''$ si può calcolare, si trova il valore per j che risulta approssimato per difetto, e la differenza $j_3''-j$ ci darà il confine superiore richiesto.

Sull'analisi dei fenomeni ciclici

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 14 aprile 1934 - XII)

Sunto. — L'A. attraverso evidenti analogie con la teoria delle funzioni quasi periodiche, esamina i procedimenti atti a decomporre una funzione assegnata solo su un reticolo periodico nelle sue varie componenti a periodo multiplo di quello del reticolo. Ciò nel caso di infiniti valori (costituiti da infinite osservazioni).

Ne deduce procedimenti approssimati per il calcolo, necessariamente approssimato, di tali componenti nel caso di un numero finito di osservazioni, e pone in rilievo la connessione di tali metodi con quelli delle perequazioni (dall'A. stesso sviluppati in altro lavoro).

1. Uno dei rami più interessanti, ma senza dubbio anche dei più tormentati, della matematica applicata è quello dei fenomeni ciclici.

Sia che si operi ad esempio in campo economico che in campo meteorologico sorgono quistioni molto vicine a quelle che al matematico si presentano nello studio di fenomeni periodici, in senso matematico. Questi ultimi, sempre nel campo puro, si sono estesi dando origine a tutte le ricerche modernissime (che si avvicinano ancor più alla realtà) della teoria delle funzioni quasi periodiche.

Tuttavia, nemmeno queste si mostrano efficacemente aderenti alla pratica: per meglio dire al campo applicativo. Ed i motivi vanno ricercati in tre ordini di cause. Anzitutto le quantità misurate vanno intese in senso statistico di variabile casuale; in secondo luogo l'esame di tali fenomeni attraverso i grafici che li rappresentano viene effettivamente eseguito *soltanto* rispetto ad un reticolo (periodico) di punti equidistanti sull'asse della variabile indipendente (tempo), concependosi i valori della funzione nei punti di tale reticolo ottenuti con procedimenti di media, di perequazione o simili da tutti i valori di un intervallo; questi intervalli poi sono tali da contenere ciascuno (possibilmente al centro) un nodo del reticolo ed abitualmente (per quanto non sempre) sono contigui sì da ricoprire tutta la variabile, senza duplicazioni. Ed infine, occorre notare che la periodicità statistica non coincide con quella matematica.

Quasi tutti i metodi presuppongono implicitamente tale conti-

nuità nella variabile e certamente il complesso delle ricerche del Vercelli sull'analisi periodale e sulla cimanalisi, messi in relazione con le ricerche sulle funzioni quasi-periodiche permetteranno di sviscerare il problema, nel caso della variabile continua.

Tuttavia, come abbiamo detto, questo non è che una prima schematizzazione.

Daremo quì l'accenno di una diversa schematizzazione e dei procedimenti di calcolo ad essa inerenti la quale si riconnette essenzialmente a due elementi fondamentali; e cioè

I. Al reticolo periodico, per l'osservazione e la lettura.

II. Ai metodi di perequazione dello Schiaparelli [1]).

2. Premettiamo senz'altro che trattandosi di ricerca di matematica applicata, ammetteremo soddisfatte *tutte* le condizioni di convergenza e simili occorrenti, tanto più che pur schematizzando il procedimento attraverso una serie numerabile di osservazioni, nella sua applicazione ci dobbiamo arrestare ad un numero finito.

Si abbia dunque una certa funzione $f(t)$; ed un reticolo periodico — U — per semplicità a periodo 1, illimitato: ..... $-2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. disteso sulla variabile continua t.

Dai valori di $f(t)$ si passi a quella di una successione $[F] \equiv F_r$ per mezzo di una operazione funzionale lineare *indipendente dal posto nel quale si opera*:

$$F_r = \int f(r + \tau)\, d\varphi(\tau)$$

ove l'integrale è preso nel senso di Stieltjes; la φ — per semplicità — risulti invariata dallo scambio di τ in $-\tau$, ed infine (per maggiore aderenza alla realtà) $\int d\varphi(\tau) = 1$, se esteso a tutto il campo d'integrazione. Noi non abbiamo segnato tale campo che però ammetteremo — per i motivi già detti — simmetrico ed eventualmente esteso da $-\infty$ a $+\infty$ [2]).

L'osservazione molto semplice, ma capitale, da fare è che in tal modo noi *non* studiamo la funzione $f(t)$, ma tutta la classe di funzioni che danno luogo alla stessa successione $[F]$, in rapporto al comportamento di questa rispetto al reticolo U.

3. Supponiamo che la $f(t)$ continua, sia periodica a periodo ω;

---

[1]) Cfr. una nostra nota, di prossima pubblicazione negli « Annali dell' Ist. Superiore Navale di Napoli » dal titolo *Formule di perequazione, loro espressione simbolica, loro uso.*

[2]) Senza insistere in questioni matematiche sottili, si osservi ad esempio che parlando di nati in un certo anno, l'intervallo di integrazione è l'anno; ed il nodo del reticolo è nel suo punto medio.

è troppo evidente che la funzione continua $F(t) = \int f(t+\tau)\, d\,\varphi(\tau)$, che per $t = \ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$ dà la $[F]$, avrà lo stesso periodo ω o uno che sia suo multiplo.

Intanto ω, rispetto al periodo 1 proprio di U può presentarsi: o come multiplo, o come sotto-multiplo, o come commensurabile, o come incommensurabile.

Nel primo caso è ovvio che la F_r, su U, si presenterà ancora con lo stesso periodo ω; e nel secondo caso, *invece*, si presenterà come *costante* sul reticolo stesso.

Se ω è commensurabile con 1, ed ha quindi la forma $\frac{m}{n}$, allora la $[F]$ si presenterà rispetto ad U, col periodo m;

Ciò si vede agevolmente, allorchè da U si passa al reticolo [1] $U^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ ottenuto inserendo fra due nodi consecutivi di U altri $(n-1)$ reticoli successivi coincidenti con U, e fra loro per traslazione, ed equidistanti. Nell'ultimo caso i valori di $[F]$ su $[U]$ sono una certa permutazione di quelli di $[F]^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ su $[U]^{\left(\frac{1}{n}\right)}$. Occorre aggiungere che in generale la $[F]$ presenta periodicità di $\frac{\lambda}{\delta}$ nodi rispetto ad $[U]^{\left(\frac{1}{n}\right)}$ ove δ è divisore di n; e quindi, come segmenti sul primo reticolo presenta un periodo λ, sul secondo un periodo $\lambda\varepsilon$, ove $\varepsilon\delta = n$. Cioè l'ispessimento del reticolo di osservazione può modificare il periodo.

3. Resta a parte il caso di ω incommensurabile con 1.

Per studiarne il comportamento, consideriamo dapprima quello di due funzioni ottenute da $F(x)$ a periodo unitario, e precisamente $F\left(\frac{x}{r}\right)$, $F\left(\frac{x}{\rho}\right)$ con r e ρ razionali, molto vicini.

È evidente che $F\left(\frac{x}{r}\right)$, $F\left(\frac{x}{\rho}\right)$ saranno rispettivamente a periodo r e ρ su tutta la variabile reale x; mentre rispetto al reticolo U, se $r = \frac{m}{n}$, $\rho = \frac{\mu}{\nu}$ esse figureranno rispettivamente a periodo n e ν.

D'altro canto se $\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho} = \frac{1}{q}$, e questo è sufficientemente piccolo le due successioni $[F'] \equiv \ldots F\left(-\frac{1}{r}\right), F(o), F\left(\frac{1}{r}\right), \ldots; [F''] \equiv \left(-\frac{1}{\rho}\right)$,

---

[1]) Si osservi che per avere una chiara idea di tali reticoli e delle operazioni da eseguire su essi bisogna pensare alle classi di resti rispetto ad un modulo ed agli ideali dell'artmetica superiore; non ci soffermiamo su ciò perchè è fuori del nostro quadro.

$F(o)$, $F\left(\frac{1}{\rho}\right)$, ... differiranno, a partire da 0, per le quantità

$$[\Delta] \equiv F(o) - F(o) = 0;\ F\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{q}\right) - F\left(\frac{1}{\rho}\right),\ F\left(2\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{1}{q}\right\}\right) - F\left(2 \cdot \frac{1}{\rho}\right); \ldots$$

formanti a lor volta una successione a periodo q (multiplo comune ad n, ν).

Quindi, se la F è *continua*, queste differenze molto piccole attorno allo zero, crescono, ritornano a zero e si riproducono con il periodo q.

Pertanto, la $[F']$ potrà pensarsi come la somma delle due successioni $[F'']$ a periodo ν e $[\Delta]$ a periodo q; e questa seconda avrà un andamento molto più lento come crescenza dell'altra (nelle abituali condizioni pratiche, s'intende).

Avviene in altri termini che la $[F']$ si presenti sul reticolo U come la $[F'']$ leggermente modificata nel primo periodo ν; più fortemente modificata nel secondo periodo, e così via via sino ad aversi il $\frac{q}{\nu}$ — esimo periodo di ampiezza ν, nel quale si ritrovano i valori primitivi, ripetendosi.

Se dunque ω irrazionale, è approssimato sempre più fortemente dai numeri razionali ρ', ρ'', ρ''',...... svolgendo per ogni coppia di questi valori le stesse considerazioni, si dedurrà che:

Una funzione avente periodo commensurabile rispetto a quello del reticolo, si presenterà su questo come una successione avente un periodo approssimato multiplo di quello del reticolo, e che gradualmente in ognuno di tali periodi si modifica, sino a ritrovare la periodicità completa dopo un gruppo di tali periodi approssimati (cfr. numero precedente).

Una funzione avente periodo irrazionale rispetto al reticolo si presenta rispetto a questo con gli stessi caratteri che una funzione quasi — periodica ha nel caso della variabile continua;

In altri termini; la successione $[F] \equiv .... F\left(-\frac{2}{\omega}\right)$, $F\left(-\frac{1}{\omega}\right)$, $F(o)$, $F\left(\frac{1}{\omega}\right)$, $F\left(\frac{2}{\omega}\right)$,.... si presenta con un primo periodo; con successive lievi modificazioni ai valori assunti ivi, allorchè si percorrono successivamente periodi eguali, si ritorna a valori quasi eguali dopo un secondo gruppo (periodo di II ordine) di quel primo periodo; e così successivamente con periodi di terzo,.... ecc. ordine. Tali onde non sono rilevabili con questo metodo.

4. Premesso ciò, supponiamo di avere una successione $[F]$, che sia somma di successioni aventi tutte i periodi interi rispetti ad U:

$$[F] = [F'] + [F''] + ...;\ [F'] \equiv F';\ [F''] = F_0'', F_1'', F_0'', F_1'', ...;\ [F'''] =$$
$$= F_0''', F_1''', F_2''', F_0''', F_1''', F_2''', ...$$

e — come sin dall'inizio abbiamo detto — non faremo né quistioni di convergenza, nè quistioni di scambi di procedimenti di limite, in quante supporremo sempre soddisfatte queste ed analoghe condizioni.

Adottiamo come procedimento base, per l'analisi della F, il procedimento seguente che chiameremo Ω.

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_1[A] = \lim \dfrac{a_0+a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \\ \Omega_2^{(0)}[A] = \lim \dfrac{a_0+a_2+\dots+a_{2n}}{n}\ ;\ \Omega_2^{(1)}[A] = \lim \dfrac{a_1+a_3+\dots a_{2n+1}}{n} \\ \dots\dots\dots \end{array}\right.$$

È troppo evidente che il procedimento Ω_1, applicato alla successione $[F']$, costante dà il valore F'; applicato alla successione $[F'']$ dà il valore $\dfrac{F_0''+F_2''}{2}$, e così via; Similmente il procedimento $\Omega_2^{(0)}$ applicato ad $[F_1']$ dà sempre F_1; applicato ad $[F'']$ dà il valore F_0'', mentre $\Omega_2^{(1)}$ dà F_1''; applicati ambedue invece a $[F''']$ danno $\dfrac{F_0'''+F_1'''+F_2'''}{3}$; applicati ad $F^{(4)}$ danno rispettivamente $\dfrac{F_0^{(4)}+F_2^{(4)}}{2}$, $\dfrac{F_1^{(4)}+F_3^{(4)}}{2}$, e così via per gli altri.

In altri termini; se si applica tutto il gruppo di operazioni $\{\Omega_m^{(0)},\dots,\Omega_m^{(n-1)}\}$ di indice r, alla $[F^{(n)}]$, si hanno i seguenti risultati:

I. Se m, n sono primi fra loro, tutte le Ω_m dànno lo stesso valore, cioè $\dfrac{1}{n}\,(F_0^{(n)}+\dots F_{m-1}^{(n)})$;

II. Se m e n non sono primi fra di loro, ma hanno il massimo comun divisore δ, si ha allora con l'applicazione delle Ω_m precisamente

$$\left\{\begin{array}{l} \Omega_m^{(0)} = \Omega_m^{(\mu)} = \Omega_m^{(2\mu)}\dots = \delta\,\dfrac{(F_0^{(n)}+F_v^{(n)}+F_{2v}^{(n)}+\dots)}{\nu} \\ \Omega_m^{(1)} = \Omega_m^{(1+\mu)} = \dots = \delta\,\dfrac{(F_1^{(n)}+F_{1+v}^{(n)}+\dots)}{\nu} \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Se ora dalla successione $[A]$ noi ricaviamo l'altra successione, periodica a periodo r o suo sottomultiplo

$$\Theta_m[A] = \Omega^{(0)}{}_m[A],\ \Omega_m^{(1)}[A],\dots,\ \Omega_m^{(m-1)}[A],\ \Omega_m^{(0)}[A],\dots;$$

vediamo che se la A è periodica avente periodo n, di cui il massimo

comun divisore con m sia precisamente δ, allora la $\Theta_r(A)$ è periodica a periodo δ, con i valori $\frac{\delta}{\nu}\left\{A_o^{(n)}+A_\nu^{(n)}+\ldots\right\}\ldots$ dianzi indicati.

5. Avendo esplicitamente ammesso che sieno soddisfatte tutte le condizioni occorrenti, supporremo (come risulterà giustificato dal fatto che occorre considerare gruppi finiti di osservazioni) di poter aggiungere ad ogni termine $F^{(r)}$ della serie di successioni

$$F = \Sigma\, F^{(r)}$$

delle successioni; sicchè si abbia

$$\Phi^{(r)} = F^{(r)} + S\, \varphi_\delta^{(r)}$$

con S sommatorio esteso a tutti i divisori di r, e con le φ tali che si abbia:

I. $$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_\delta^{(k\delta)} = O,$$

II. $$\Omega\, \Phi^{(r)} = O.$$

Ciò significa dire, sostanzialmente che modifichiamo *tutte* le successioni (salvo quella costante) in modo da trovare O come valor medio in ogni periodo, aggiungendo alla successione delle costanti *tutti* i valori medi dei periodi; e che ripetiamo la stessa operazione per tutti i reticoli multipli di quello fondamentale.

Supporremo inoltre che le operazioni Ω, Θ si possano applicare termine a termine alle serie (cioè che si abbiano a considerare serie per cui ciò sia lecito).

Se dunque la F già soddisfa a tale condizione, o è stata ridotta a soddisfarla, la sua decomposizione è quanto mai immediata.

Risulta infatti, per quanto precede:

$$\begin{cases} \Theta_1(F) \equiv F_1 \\ \Theta_2(F) \equiv \Omega_2^{(o)} F = F_2^{(o)}\,;\ \Omega_2^{(o)} F = F_1^{(o)} \\ \Theta_3(F) \equiv \Omega_3^{(o)} F = F_3^{(o)}\,;\ldots \end{cases}$$

in quanto precisamente vale la formula fondamentale, nel caso ridotto ora considerato:

$$\Omega_m^{(s)}[F_n] = \begin{cases} O & n \neq m \\ F_m^{(s)} & n = m \end{cases}$$

6. Se dunque si fosse in presenza di una successione *infinita*

F ottenuta come somma di successioni periodiche aventi ciascuna valor medio *nullo* su qualunque reticolo sotto-multiplo del periodo proprio, l'operazione Ω e quella Θ da essa dedotta permettono di separare le singole successioni periodiche.

Ma, come abbiamo detto s u da principio, noi siamo *sempre* in presenza di un numero finito di osservazioni. Che cosa diventa allora il procedimento ora delineato?

È fin troppo chiaro che quì cadono *tutte* le condizioni di convergenza: esse non si presentano più. Se infatti si avessero λ osservazioni, noi non avremmo più una serie, ma tutt' al più soltanto le onde sino al periodo N incluso.

Il procedimento Ω_1, applicato ad una $[F] \equiv [F_1] + [F_2] + \ldots$ con le dette condizioni per i valori medi, conduce a considerare il valore F_1 come esatto; intanto, poichè non vi è passaggio al limite, si presenterà come valore il valore

$$F_1 + \frac{F_2^{(\rho)}}{\lambda''} + \frac{F_2^{(\sigma)}}{\lambda'''} + \ldots$$

ove λ'' è la parte intera di $\frac{\lambda}{2}$, λ''' quella di $\frac{\lambda}{3}$ e così via, mentre $\rho, \sigma \ldots$ sono i resti delle divisioni.

In pratica dunque noi avremo il valore F_1 soltanto come approssimato; e con approssimazione tanto maggiore (come è evidente) quanto maggiore è il numero delle osservazioni. E converrà ove sia possibile, considerare fra i λ valori di approssimazione alla $\Omega_1[F]$, cioè $\frac{F(o)}{1}$; $\frac{F(o)+F(1)}{2}$; .... $\frac{F(o)+\ldots+F(\lambda)}{\lambda}$ gli ultimi per vedere se effettivamente l'intervallo si restringe. Per trovare i valori esatti, in tali casi, o bisogna risolvere sistemi di equazioni lineari (di cui la formazione è immediata) oppure ricorrere al metodo delle approssimazioni successive (ad esempio con la regola di falsa posizione). In pratica abbiamo riscontrato che basta il procedimento ordinario.

Le stesse considerazioni si devono fare a maggior ragione per le operazioni Ω_2, osservando che per esse il numero delle osservazioni si riduce a metà, e così via: e se vi sono onde lunghissime il metodo viene ad essere del tutto in difetto. Si può aggiungere che se la successione $[F]$ consta della somma di successioni periodiche e di una che da il movimento profondo della successione, quest' ultima sfuggirà all' analisi dianzi indicata, assieme a tutte le onde a periodo lungo; e che soltanto i metodi di perequazione possono staccare il movimento profondo da quelli periodici. L' analisi anzidetta va dunque applicata solo dopo aver effettuata tale separazione.

Se si introducono concetti di probabilità, allora si può vedere che l'errore probabile cresce con la radice quadrata del numero $\frac{\lambda}{r}$, applicando le Ω_r.

Dunque, nel caso di λ osservazioni, si può semplicemente adottare questo schema pratico di calcolo:

I. Al posto del processo Ω di limite, sostituire quello di valore probabile dedotto dai valori $\frac{\Sigma F(\rho k)}{\sigma}$, per le diverse Ω_r: cioè, per determinare la F_1 si sostituirà al procedimento Ω_1 il procedimento M_1 che consiste nello scegliere il valore probabile dedotto dal gruppo di valori $\frac{F(o)+\ldots+F(\mu)}{\mu}$; $\frac{F(o)+\ldots+F(\mu+1)}{\mu+1}$; $\frac{F(o)+\ldots+F(\lambda)}{\lambda}$; per determinare la $F_2 \equiv F_2(o)$, $F_2(1)$, $F_2(o)\ldots$ si userà lo stesso tipo di calcolo, con operazioni $M_2^{(o)}$, $M_2^{(1)}$ applicate ai reticoli 1, 2, 4..... $< \lambda$ 1, 3, 5..... $< \lambda$; e così via per le $M_3\ldots$ che sostituiscono le $\Omega_3\ldots$

II. Il procedimento stesso si arresta allorchè l'errore probabile diventa abbastanza grande, sì da lasciare un'onda residua non ulteriormente decomposta: in pratica si arriverà sino ad onde di periodo $\sqrt{\lambda}$: Tale onda congloba sia il movimento profondo, sia le onde periodiche a periodo lungo.

Del resto, tale procedimento resta a sua volta completato da quelli di perequazioni (sui quali è in corso di stampa una nota dal titolo « *Formole di perequazione, loro espressione simbolica, loro uso,* negli Annali del R. Istituto Superiore Navale, di Napoli); i quali sono atti a sceverare i diversi tipi di periodi che si presentano. Possiamo sin da ora affermare che tali procedimenti effettivamente applicati a casi concreti (ad esempio frequenza di pioggia annuali) si sono trovati concordi nel porre in luce il noto periodo undecennale delle macchie solari, il suo semi periodo, ed il suo quarto.

7. Dal punto di vista matematico poi restano aperte le ricerche sulla convergenza e sulla validità degli sviluppi infiniti dianzi indicati, e sulla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per la rappresentabilità di una funzione di reticolo sotto quella forma.

« Minimum » di condizioni, per un funzionale — Lunghezza di curva

Nota di **G. Barba**

(Adunanza del dì 14 aprile 1934 - XII)

Sunto. — Si danno le condizioni minime da imporre ad un funzionale per potersi chiamare lunghezza di una curva continua.

In una precedente Nota [1]), abbiamo messo in rilievo il carattere gruppale inerente ad una definizione plausibile di lunghezza di una curva.

Tale carattere è dovuto ai « movimenti » della curva stessa.

È pertanto, naturale chiedersi se, il più semplice dei movimenti, *la traslazione,* sia sufficiente — ferme restando le altre condizioni da me fissate [2]) — ad una definizione del genere.

Con la presente si risponde in modo affermativo, dimostrando, precisamente, il:

Teorema. Un funzionale di curva continua $\varphi(c)$, additivo, semicontinuo inferiormente, coincidente con la lunghezza nel caso delle linee poligonali, avente valori eguali su curve dedotte l'una dall'altra per traslazione arbitraria, coincide, necessariamente, con la lungheza della curva (nel senso ordinario di limite delle poligonali inscritte).

Supponiamo, infatti, che su un cerchio C, [ci riferiamo, per semplicità, ad un cerchio, ma potevamo riferirci ad una curva chiusa qualunque], il funzionale $\varphi(c)$, non coincida con la lunghezza ordinaria $\lambda(c)$ e, pertanto, sia:

$$\varphi(c) = \lambda(c) - \varepsilon$$

con ε prefissato.

Segue che, da un certo n in poi, si ha:

$$p_n > \varphi(c)$$

con p_n lunghezza della poligonale p_n, di n lati, inscritta in C.

D'altra parte, in base alla additività di φ, almeno su una corda $\overline{P_{s-1} P_s}$, sarà:

$$\overline{P_{s-1} P_s} > \varphi(\widehat{P_{s-1} P_s}) . \tag{1}$$

---

[1]) *Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva.*

[2]) *Sulla definizione di lunghezza di una curva.* « R.ti del Circolo Matematico di Catania ».

Ciò posto, inscriviamo nel cerchio C, *tutti i possibili* poligoni di $n, n+1, \ldots\ldots,$ lati.

Per ogni poligonale inscritta di i lati (con i da n all'∞), si à, almeno, un lato (e corrispondente archetto su esso insistente) soddisfacente la (1), di guisa che, sul cerchio, qualunque archetto, comunque piccolo, soddisfa la (1).

Consideriamo, ora, una qualunque poligonale di lunghezza L. Potremo approssimare — con sole traslazioni — tale poligonale, con archetti del cerchio C [presentandosi, in ogni caso, due archetti, diametralmente opposti, soddisfacenti alla questione, si sceglieranno quelli per cui la curva approssimata γ, sarà dalla stessa banda della poligonale].

Sarà, ovviamente:

$$\varphi(\gamma) < L$$

relazione assurda, in quanto contraddice la supposta semicontinuità del funzionale.

Per una curva di lunghezza infinita, poi, si procede come nella mia precedente Nota.

—

Sull' Esagono completo nel quattrospazio.

Nota del socio ord. **P. del Pezzo**

(Adunanza del dì 5 maggio 1934 - XII)

Sunto. — Si esamina la figura di un esagono **R** nel quattrospazio **H** definendo alcuni punti D ed E come pure alcune rette *m* e *c* ad esso pertinenti e deducendone o nel trespazio, o nel piano, per projezioni, configurazioni di triangoli in una, o più maniere omelogici. Si fa così un primo passo nelle indagini sui poligoni, o poliedri, sovraspaziali.

1. *a)* In un esagono completo **R** del quattrospazio **H**; notato i vertici con 1, 2, 3, 4, 5, 6, vi sono quindici lati, o spigoli, $s_{ij} \equiv ij$, con $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ed $i \neq j$; vi sono venti facce σ_{ijl}, con $i, j, l = 1, 2, \ldots 6$ ed $i \neq j \neq l$; vi sono quindici trefacce. Ad uno spigolo s_{ij} si oppone la trefaccia $\mathbf{S}_{ij}$ individuata dai quattro vertici residui tolti i e j. Ad ogni faccia piana se ne oppone un' altra secondo le partizioni in due terne dei sei vertici dati.

b) Ciascuna faccia piana σ incontra la opposta σ' in un punto $D \equiv \sigma\sigma'$ che si dirà *diagonale*. Uno dei D è notato con $D \equiv 123{,}456$. I punti D, di uno **R** generico, stanno fuori degli spigoli, ve n' è uno in ciascuna faccia piana e quattro in ciascuna trefaccia.

c) Ciascuno spigolo s incontra la opposta trefaccia **S** in un punto $E_{ij} \equiv s_{ij}\, \mathbf{S}_{ij}$. I punti E sono distinti dagli D. Ne giacciono tre in ciascuna faccia piana e sei in ciascuna trefaccia sui sei suoi spigoli più uno sullo spigolo opposto.

2. *a)* Una faccia piana $\sigma \equiv 123$ è contenuta nelle tre trefacce i cui simboli hanno tutti e tre i numeri 1, 2, 3; incontra poi in spigoli quelle trefacce nei cui simboli appariscono due soli dei numeri 1, 2, 3, cioè nove trefacce; incontra poi in rette *e* diverse dagli spigoli le tre rimanenti trefacce.

b) La faccia $\sigma \equiv 123$ incontra la trefaccia $\mathbf{S}_{23} \equiv 1456$ in una retta *e* che passa per il vertice 1 e per il punto $D \equiv 123{,}456$. Vi sono dunque tre rette *e* giacenti in $\sigma \equiv 123$, cioè 1D, 2D, 3D. In ciascuna faccia piana vi sono tre rette *e* che dal relativo punto D projettano i vertici.

Per un dato punto D passano dunque sei rette *e*, quelle che da D

projettano i vertici, le quali trovansi distribuite in due terne nei due piani per il dato D.

c) L'esagono **R** è projettato su di un trespazio **K** generico da un punto D in due terne di punti allineate su due rette sghembe.

È projettato su un piano ω generico in **H** da una retta generica per un punto D in due terne di punti allineati; laddove da una retta *b* congiungente due punti D nei sei vertici di un quadrilatero piano completo.

d) Per un vertice 1 di **R** passano dieci rette *e*, quelle che da 1 projettano i dieci punti D.

3. *a)* Due trefacce non concorrenti in una faccia piana, hanno uno spigolo comune e s'incontrano in un piano τ uscente da quello spigolo. Così dallo spigolo $s_{12} \equiv 12$ escono le coppie $\mathbf{S}_{56} \equiv 1234$, $\mathbf{S}_{34} \equiv 1256$; $\mathbf{S}_{46} \equiv 1235$, $\mathbf{S}_{35} \equiv 1246$; $\mathbf{S}_{36} \equiv 1245$, $\mathbf{S}_{45} \equiv 1236$, cioè le tre coppie di trespazi opposti che da s_{12} projettano le coppie di spigoli opposti del tetraedro 3456 opposto ad esso spigolo s_{12}. Dunque da ciascuno spigolo dell'esagono **R** escono tre piani τ.

b) Niuna faccia piana contenuta nella trefaccia $\mathbf{S}_{56}$ si oppone ad un'altra contenuta nella $\mathbf{S}_{34}$, sicchè sul piano $\tau \equiv \mathbf{S}_{34}\,\mathbf{S}_{56}$ non vi sono punti D. I piani τ non contengono punti D.

4. *a)* Si separino i vertici in due triangoli $\pi \equiv 123$, $\pi' \equiv 456$. Gli spigoli 14, 25, 36 riferiscono tra loro π e π'. La retta *m* in **H**, unica, appoggiata a cotesti tre spigoli è quella dove concorrono le trefacce $\mathbf{S}_{14}$, $\mathbf{S}_{25}$, $\mathbf{S}_{36}$. I tre punti di appoggio della *m* su essi spigoli sono E_{14}, E_{25}, E_{36} e i piani τ uscenti da *m* sono $\tau_{14} \equiv m s_{14} \equiv \mathbf{S}_{25}\,\mathbf{S}_{46}, \ldots$.

b) Le rette *m* si notano anche con la partizione dei sei numeri in tre coppie. Le tre rette

$$m \equiv 14\,,25\,,36 \quad ; \quad m \equiv 14\,,23\,,56 \quad ; \quad m \equiv 14\,,26\,,35$$

concorrono nel punto E_{14}.

c) Tre punti E notati con tutti e sei i numeri stanno per diritto sopra una *m*.

Tre rette *m* nelle cui notazioni entra una stessa coppia di numeri concorrono in un punto E.

Per un punto E passano tre rette *m*, su di una *m* vi sono tre punti E, dunque le *m* sono del numero quindici.

5. *a)* Data la retta

$$m_0 \equiv 12\,,34\,,56$$

ve ne sono sei che le si appoggiano: due in E_{12}, due in E_{34}, due in E_{56}. Ve ne sono otto che non la incontrano distribuite in due quaterne segnate nei seguenti due specchietti

$$\begin{array}{l|l} m_1 \equiv 13, 25, 46 & m_5 \equiv 13, 26, 45 \\ m_2 \equiv 14, 26, 35 & m_6 \equiv 14, 25, 36 \\ m_3 \equiv 15, 24, 36 & m_7 \equiv 15, 23, 46 \\ m_4 \equiv 16, 23, 45 & m_8 \equiv 16, 24, 35 \end{array} \qquad (1)$$

Due di uno stesso specchietto non si incontrano nè tra loro nè con m_0. Così $m_0, m_1, \ldots m_4$ ed $m_0, m_5, \ldots m_8$ costituiscono due cinquine sghembe. Una di uno specchietto ne incontra solo tre dell'altro.

b) Separando i vertici in due terne si ottengono due triangoli, p. e. $\delta \equiv 135$, $\delta' \equiv 246$ che riferiti tra loro nei sei modi diversi individuano sei rette m, delle quali una è la m_0, altre due m_6, m_4 sono incluse negli specchietti (1) ed altre tre ne sono escluse e si appoggiano alla m_0, l'una m_{01} in E_{12}, l'altra m_{02} in E_{56}, la terza m_{03} in E_{34}.

c) Dalla m_0 come asse centrale su di un piano ω generico in H projettando i triangoli δ e δ' si ottiene un unico triangolo δ'' dove le immagini si sovrappongono. Analogamente dalle $m_{01}, m_{02}, m_{03}, m_4, m_6$ dando ordini diversi alla sovrapposizione.

6. *a)* Da un punto C generico sulla retta m_0 i due triangoli $\delta \equiv 135$, $\delta' \equiv 246$ sono projettati su di un trespazio K generico in H in due triangoli $\zeta \equiv 1'3'5'$, $\zeta' \equiv 2'4'6'$ prospettivi con il centro di prospettiva $U \equiv m_0 \longleftrightarrow K$.

Il punto C, come la m_0, giace nei tre trespazi individuati dalle tre coppie di lati, riferiti tra loro, dei due triangoli δ e δ'. Se da C si guidino le tre rette appoggiate ad esse tre coppie di lati, coteste tracciano su K tre punti per diritto sull'asse di prospettiva u, onde giacciono in un piano $\gamma \equiv C + u$.

b) Le coppie di triangoli $\delta_1 \equiv 235$, $\delta_1' \equiv 146$; $\delta_2 \equiv 145$, $\delta_2' \equiv 236$; $\delta_3 \equiv 136$, $\delta_3' \equiv 245$, che si deducono da δ e δ' con scambi di vertici riferiti, costituiscono con δ e δ' una quaterna $(\delta\delta')$ di coppie. Due dell'analoga quaterna $(\zeta\zeta')$ che proviene per projezione da C sono omologici con il medesimo centro U e con quattro assi u_1, u_2, u_3, u_4, i quali a due a due s'incontrano, sicchè giacciono in un piano υ.

c) Se da un asse c generico in H appoggiato alla m_0 in C si projettino le coppie di triangoli della quaterna $(\delta\delta')$ su di un piano ω si otterranno coppie di una quaterna (ϑ, ϑ') prospettive con il medesimo centro $(c + m_0) \longleftrightarrow \omega \equiv V$ e con i quattro assi v_1, v_2, v_3, v_4.

d) Si ha anche

$$V \equiv (E_{12} + c) \longleftrightarrow \omega \equiv (E_{34} + c) \longleftrightarrow \omega \equiv (E_{56} + c) \longleftrightarrow \omega.$$

e) Se l'asse c si appoggi a due delle m complanari, p. e. m_0 ed $m_{01} \equiv 12, 36, 45$, allora la trefaccia $S_{12} \equiv 3456$ contiene il piano $m_0 m_{01} c$ ed i vertici 3, 4, 5, 6 da c sono projettati per diritto sulla

retta $\omega \leftarrow\rightarrow S_{12}$. I due triangoli $135 \equiv \delta$, $246 \equiv \delta'$ si projettano in due con la stessa base $S_{12} \leftarrow\rightarrow \omega$, e perciò in due modi projettivi, costituenti una configurazione (10, 3) degenere.

7. *a)* Si pongano in **H** tre rette generiche m_0, m_4, m_6 e sulla m_0 i punti distinti E_{12} ed E_{34}. Da E_{12} si guidi generico lo spigolo s_{12} e da E_{34} lo spigolo s_{34}. Si costruisca la retta appoggiata alle s_{12}, s_{34}, m_6 che fornisce negli appoggi i vertici 1 e 4 ed il punto E_{14}. Analogamente mediante la retta appoggiata alle s_{12}, s_{34}, m_4 si ottengono i vertici 2 e 3 ed il punto E_{23}. Con siffatte costruzioni si è individuata la trefaccia $S_{56} \equiv 1234 \equiv m_0 E_{23} E_{14}$.

b) Sono individuate anche le seguenti trefacce:

$S_{14} \equiv 23\ m_6$, la quale fornisce $E_{56} \equiv S_{14} \leftarrow\rightarrow m_0$;
$S_{23} \equiv 14\ m_4$, la quale contiene anche $E_{56} \equiv S_{23} \leftarrow\rightarrow m_0$;
$S_{25} \equiv 13\ m_6$, che passa per il già dato E_{34} e fornisce $E_{16} \equiv S_{25} \leftarrow\rightarrow m_4$;
$S_{45} \equiv 13\ m_4$, che passa per il già dato E_{12} e fornisce $E_{36} \equiv S_{45} \leftarrow\rightarrow m_6$;
$S_{36} \equiv 24\ m_6$, che passa per il già dato E_{12} e fornisce $E_{45} \equiv S_{36} \leftarrow\rightarrow m_4$;
$S_{16} \equiv 24\ m_4$, che passa per il già dato E_{34} e fornisce $E_{25} \equiv S_{16} \leftarrow\rightarrow m_6$.

E così sono costruiti, o dati, tutti i nove punti E giacenti sulle tre rette m.

c) Sono allora individuate anche le trefacce:

$$S_{12} \equiv 3436 \equiv 34\ E_{36}\ E_{45},$$
$$S_{34} \equiv 1256 \equiv 12\ E_{16}\ E_{25}.$$

d) Le quattro trefacce $S_{12}, S_{14}, S_{23}, S_{34}$ concorrono nello spigolo s_{56}, e si ha

$$S_{25} \leftarrow\rightarrow s_{56} \equiv S_{45} \leftarrow\rightarrow s_{56} \equiv 6$$

ed

$$S_{16} \leftarrow\rightarrow s_{56} \equiv S_{36} \leftarrow\rightarrow s_{56} \equiv 5.$$

Così è costruito un esagono **R** in **H** con assegnate tre rette m_0, m_4, m_6 e punti E_{12}, E_{34}.

e) Si osservi che avendosi

$$S_{16} \leftarrow\rightarrow S_{36} \equiv 245 \equiv 24\ E_{25}\ E_{45},$$
$$S_{25} \leftarrow\rightarrow S_{45} \equiv 136 \equiv 13\ E_{16}\ E_{36},$$

costruite le facce piane 245 ed 136 si potrà fare

$$2\,E_{25} \leftarrow\rightarrow 4\,E_{45} \equiv 5 \quad , \quad 1\,E_{16} \leftarrow\rightarrow 3\,E_{36} \equiv 6.$$

8. *a)* Se dalla retta c appoggiata alle m_0, m_4, m_6 si projettino i due triangoli $\delta \equiv 135$, $\delta' \equiv 246$ sul piano generico ω si otterranno

due triangoli $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ prospettivi in tre modi diversi, con i tre riferimenti additati dalle m_0, m_4, m_6 e con i centri di prospettiva nei punti $O_0 \equiv \omega \leftarrow\rightarrow (c + m_0)$, $O_4 \equiv \omega \leftarrow\rightarrow (c + m_4)$, $O_6 \equiv \omega \leftarrow\rightarrow (c + m_6)$.

b) Reciprocamente assegnati nel piano ω tre centri O_0, O_4, O_6, non per diritto, si guidino in un quattrospazio **H** contenente ω generiche per essi le m_0, m_4, m_6 una per ciascuno. Mercè coteste e gli altri dati necessari, come nel n.° prec., si costruisca un esaedro **R** e si ricaveranno con projezione dalla c i due triangoli $\mathfrak{S}$ e $\mathfrak{S}'$ in ω prospettivi in tre modi diversi con i dati tre centri O_0, O_4, O_6.

Commemorazione del socio corrispondente **Gaetano Minunni**

letta dalla socia **M. Bakunin**

(Adunanza del dì 5 maggio 1934 - XII)

Gaetano Minunni, socio corrispondente della nostra Accademia dal 1932, è morto quasi improvvisamente il 7 marzo 1934, quando ancora sembrava dovesse dedicare alla scienza e all'insegnamento la sua attività. Il ricordare i suoi lavori scientifici è la migliore espressione della stima che noi serbiamo per il Collega scomparso.

La copia degli argomenti trattati e l'importanza delle quistioni discusse appare a chiunque consideri le numerose sue pubblicazioni.

Le indagini per determinare la struttura dei vari composti ha avuto uno speciale fascino per lui e tutti i suoi lavori sugli acidi idrossilamici, sulle benzaldossime, sulle condensazioni degli acidi β-chetonici con aldeidi, idrazoni e α-aldossime sono condotti con precisione di tecnica ed acume di osservazioni, che gli hanno permesso di rendersi conto della costituzione dei corpi e di realizzarne le sintesi.

Studioso colto e di vivido ingegno, ha dato prova di queste sue preziose qualità già appena trentenne coi « Iahrbuch der organischen Chemie » che furono da lui pubblicati nel 1893-94-95, ed in questi ultimi anni con la compilazione di un'opera poderosa, un trattato di Chimica Organica, con la quale voleva chiudere la sua vita scientifica.

Quasi presago della sua fine lo assillava il rammarico di non poterlo completare e così dolorosamente è avvenuto.

Nato a Brindisi nel 1865, fu professore a Sassari a Catania ed a Napoli di Chimica Farmaceutica dedicando il suo tempo alla ricerca ed all'insegnamento.

Vada alla sua memoria il mesto e riverente saluto dei suoi colleghi.

Pubblicazioni del Prof. Gaetano Minunni

1) *Sull' azione della p-toluidina e dell' anilina sulla floroglucina.* Gazz. chim. ital., 1890, vol. 20.
2) *Ricerche su taluni derivati dell' acido lapacico.* (In collab. col prof. E. Paternò). Gazz. chim. ital, 1889, vol. 19.
3) *Sull' azione della fenilidrazina sull' acido benzidrossamico.* Gazz. chim. ital., 1890, vol. 20.
4) *Nuovo modo di formazione dell' anidride benzoica.* (In collab. col dott. L. Caberti). Gazz. chim. ital., 1790, vol. 20.
5) *Sui composti sodici delle amine aromatiche.* Gazz. chim. ital., 1890, vol. 20.
6) *Sulla costituzione delle ossime isomere.* Gazz. chim. ital., 1891, vol. 21, parte I.
7) *Sull' azione della fenilidrazina sulle benzaldossime.* (In collab. col dott. L. Caberti). Gazz. chim. ital., 1891, vol. 21, parte I.
8) *Sul tiofene.* Gazz. chim. ital., 1891, vol. 21, parte I.
9) *Sull' azione della fenildrazina su talune aldossime isomere.* (In coll. col dott. G. Corselli). Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
10) *Sopra un nuovo metodo per determinare la struttura del gruppo ossimmidico negli eteri delle ossime.* (In coll. col dott. G. Corselli). Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
11) *Sull' azione della fenildrazina sui derivati benzoilici di talune α-aldossime.* (In collab. col dott. G. Corselli). Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
12) *Sulla formazione del benzonitrile dall' α-benzaldossima.* Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
13) *Ricerche sulle ossime del benzile.* (In coll. col dott. G. Ortoleva). Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
14) *Sulla struttura chimica delle aldossime e delle chetossime isomere.* Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
15) *Sopra un nuovo metodo di preparazione dell' anidride benzoica e sul processo di formazione dell' acido deidroacetico dal cloruro di acetile.* Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
16) *Sull' α-benzilfenilidrazina e sull' ossidazione degli idrazoni.* Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
17) *Azione della β-benzoilfenilidrazina sull'aldeide benzoica.* Gazz. chim. ital., 1892, vol. 22, parte II.
18) *Costituzione dell' acido dibenzidrossamico.* (In collab. col dott. G. Ortoleva). Gazz. chim. ital., 1893, vol. 23, parte II.
19) *A proposito di due recenti pubblicazioni sulle ossime del benzile.*

(In coll. col dott. G. Ortoleva). Gazz. chim. ital., 1893, vol. 23, parte II.

20) *Jahrbuch der organischen chemie.* 1893.

21) *Idem,* 1894.

22) *Idem,* 1895.

23) *Jahresbericht über der Fortscritte der Chemie,* 1894.

24) *Idem,* 1895.

25) *Ossidazione del benzalfenilidrazone.* (In collab. col dott. E. Rap). Gazz. chim. ital., 1896, vol. 26, parte I.

26) *Nuove ricerche sulla trasformazione delle α-aldossime in nitrili.* (In collab. col dott. D. Vassalli). Gazz. chim. ital., 1896, vol. 26, parte I.

27) *Nuove ricerche sulle isomerie dei prodotti di ossidazione degli idrazoni.* Gazz. chim. ital., 1897, vol. 27, parte II.

28) *Su taluni derivati del α-benzilfenilidrazina.* Gazz. chim. ital., 1897, vol. 27, parte II.

29) *Azione dell' idrossilammina sui chetoni del tipo R. CH. : CH. CO. CH. : CH. R.* Gazz. chim. ital., 1897, vol. 27, parte II.

30) *Sulla costituzione del deidrobenzalfenilidrazone e sulla sua trasformazione in dibenzaldifenilidrotetrazone.* Gazz. chim. ital., 1897, vol. 27, parte II.

31) *Azione dei cloruri acidi sugli idrotetrazoni. Sulla costituzione del dibenzaldifenilidrotetrazone e sulla trasformazione nell' osazone del benzile fusibile a 225°.* Gazz. chim. ital., 1897, vol. 27, parte II.

32) *Sulla sostituzione del gruppo aldeidico R. CH = col radicale benzoile nei derivati dell' idrdzina.* (In collab. col dott. C. Carta-Satta). Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

33) *Su talune nuove aldazine e sul loro comportamento col cloruro di benzoile.* (In collab. col dott. Carta-Satta). Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

34) *Sull' ossima del dibenzalacetone.* Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

35) *Nuove ricerche sull' azione del cloridrato di idrossilammina sui chetoni del tipo R.CH : CH. CO. CH : CH.R. in presenza di acetato sodico.* (In collab. col dott. C. Carta-Satta). Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

36) *Sul nuovo metodo di eterificazione in presenza di piridina.* Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

37) *Nuove ricerche sull' azione dell' idrossilammina sull' acido deidroacetico.* Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

38) *Sull' ossidazione del fenilidrazone dell' aldeide cinnamica.* (In coll.

col dott. G. ORTOLEVA). Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

139) *Sull' ossidazione del fenilidrazone dell' aldeide salicilica.* (In coll. col dott. C. CARTA-SATTA). Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

140) *Sul dipiperonaldifenilidrotetrazone e sulle sue trasformazioni isomeriche.* Gazz. chim. ital., 1899, vol. 29, parte II.

141) *Azione del cloro sulla stricnina in soluzione di acido acetico glaciale.* (In collab. col dott. G. ORTOLEVA). Gazz. chim. ital., 1900, vol. 30, parte I.

142) *Azione del cloro sulla cinconina in soluzione di acido acetico glaciale.* (In collab. col dott. A TAMBURELLO). Sassari, 1904.

143) *Azione del cloro sulla brucina in soluzione di acido acetico glaciale.* (In collab. col dott. R. CIUSA). Sassari, 1904.

144) *Osservazioni intorno ad un lavoro di Eug. Bamberger e Wilh. Pensel.* Sassari, 1904.

145) *Sui prodotti di condensazione dei fenilidrazoni aromatici con l' etere acetoacetico.* Sassari, 1904.

146) *Riduzione dell' α-dibenzalacetonidrossilaminossima.* (In collab. col dott. R. CIUSA). Sassari, 1904.

147) *Nuove sintesi di nuclei eterociclici azotati.*
I. Acidi pirazolcarbonici per deidrocondensazione degli aldeidrazoni con etere acetacetico. Gazz. chim. ital., 1925, pag. 502.

148) *II. Acidi 1, 3, 5, triaril-pirazoli-4-carbonici e 1, 3, 5-triaril-pirazoli da aldoidrazoni ed etere benzoilacetico.* Gazz. chim. ital., 1928, pag. 691.

149) *III. Triarilderivati dell' 1, 2, 4-triazolo dagli ariliden-2-4-difenilsemicarbazoni.* Gazz. chim. ital., 1928, pag. 830.

150) *I prodotti di ossidazione degli aldeidrazoni aromatici e loro trasposizioni molecolari.* Gazz. chim. ital., 1927, pag. 505.

151) *Nuove ricerche sull' ossidazione dei composti idrazimici.*
I. Comportamento dei P. tolilidrazoni di talune aldeidi aromatiche con nitrito di amile. Gazz. chim. ital., 1927, p. 527.

152) *L' ipotesi stereochimica di Hanztsch e Werner di fronte ai fatti sperimentali e la costituzione delle ossime isomere.* Gazz. chim. ital., 1928, pag. 504.

153) *Nuove sintesi nel gruppo degli amminoacidi.*
I. La condensazione delle aldossime con gli eteri degli acidi β-chetonici. Gazz. chim. ital., 1928, pag. 485.

154) *II. Gli α-anisilidenammino-β-lattoni.* Gazz. chim. ital., 1929, p. 32.

155) *III. Comportamento degli α—ariliden-ammino—β—cinnamolattoni con la fenilidrazina e con l' idrossilamina ed un nuovo metodo*

per la sostituzione dell' idrogeno con l' aminogruppo. Gazz. chim. ital., 1929, pag. 16.

56) *Ariliden-2-4-difenilsemicarbazoni da aldofenilidrazoni ed isocianato di fenile.* Gazz. chim. ital., 1928, pag. 808.

Sull' affioramento della roccia detta « diabasica » in territorio di Frigento *(Prov. di Avellino)*

Nota I del prof. **F. Penta**

(Adunanza del dì 9 giugno 1934 - XII)

Sunto. — Esposta la descrizione dell' affioramento, che è inciso dalla strada Frigento - Guardia dei Lombardi, e riferito sullo studio della roccia e degli scisti *(Ftaniti)* incassanti, si conclude con lo stabilire che trattasi di un *dicco di diorite ofitica con biotite,* ma fortemente cloritizzata. Si segnala inoltre l' importanza che tale intrusione terziaria (o postpliocenica) potrebbe presentare in rapporto alla salita o spostamento in genere di idrocarburi nella regione, già favorevolmente indiziata a petrolio.

I.

Osservazioni geologiche e studio della roccia incassante

La strada rotabile, che, passando sotto Frigento, va verso S. Angelo e Guardia Lombardi, a circa km. 6,8 dopo il bivio per Frigento incide obliquamente l' affioramento di una roccia ignea; mentre sul lato Nord (a sinistra, procedendo verso S. Angelo) tale roccia affiora per una lunghezza di una decina di metri e per un' altezza di poco meno di 2 metri al disopra del piano stradale, sul lato Sud la roccia medesima è in vista soltanto per pochi metri (4 - 5 m.) di lunghezza, pur mantenendo la stessa altezza sul piano stradale. In direzione perpendicolare all' asse della strada l' affioramento non oltrepassa una dozzina di metri, in modo da sfuggire facilmente al passante, specie se in veicoli celeri; caratteristica sufficiente però per rintracciarlo è che in quel punto la strada si sviluppa in una breve e poco pronunziata trincea, localmente conosciuta col nome di « pietra spaccata ».

La roccia ignea in esame è incassata fra gli scisti squamosi silicei eocenici affioranti lungo il crinale, che divide la valle dell' Ufita da quella del Fredane e sul quale si sviluppa la strada suddetta. Da quanto può desumersi dall' affioramento, il contatto (ad est) è parallelo al piano di stratificazione degli scisti, piano che in quel punto

è pressoché verticale e con direzione quasi N - S. In base a tutto ciò può ritenersi che si tratta di un dicco - strato, molto inclinato, se non addirittura verticale. Sulla potenza del dicco, allo stato dell' affioramento, nulla può precisarsi; volendo riferirsi alla sola roccia messa a nudo, non si può attribuire al dicco stesso una potenza superiore ai 4 - 5 m.

In superficie la roccia è fortemente alterata con formazione di placche sovrapposte, che simulano gli scisti del contatto; il dicco si presenta inoltre attraversato da numerose fratture primarie dall' andamento molto irregolare.

Varî autori ricordano l' affioramento di questa roccia: il Galdi [1]), citando anche il Del Re, il Brocchi ed il Taramelli, precisa che « si tratta di una roccia verde, in apparenza diabasica con pirite di segregazione magmatica ». La roccia fu pure richiamata dal De Lorenzo [2]).

Nel 1893 l' Artini [3]) ne aveva dato una descrizione petrografica dettagliata: in questa descrizione notava che la roccia « al micro- « scopio si rivela con tessitura ofitica e come un *diabase* molto alte- « rato, in cui l' elemento pirossenico era stato totalmente sostituito « da clorite ». I minerali costitutivi riconosciuti dall' Artini erano: 1) oligoclasio (geminato secondo Albite e spesso anche secondo Carlsbad) primario con zone esterne di oligoclasio secondario; 2) clorite pseudomorfica poco frequentemente di cristalli a sezione ottagona con angolo vicino a 45° e che l' A. ritenne di pirosseni. Oltre la biotite, l' A. riconobbe pure la presenza di ilmenite, apatite, titanite e poi, come prodotti di decomposizione propriamente detta, calcite e quarzo limpido granulare.

L'applicazione del microscopico teodolitico, del quale ho potuto disporre [4]) nello studio della roccia, mi ha permesso alcuni rilievi mineralogici, inevitabilmente sfuggiti nel 1893 all' Artini, i quali, anche indipendentemente dagli elementi stratigrafici e tettonici [5]),

---

[1]) Galdi B. — *Ricerche scientifiche e pratiche sui petroli dell' Italia meridionale continentale.* pag. 74. Atti R. Istit. d'Incoragg. di Napoli, 1918.

[2]) De Lorenzo G. — *Geologia e Geografia Fisica dell' Italia Meridionale,* pag. 118 e 120 — Ed. Laterza. Bari 1904.

[3]) Artini E. — *Appunti petrografici sopra alcune rocce italiane. Diabase alterato di Frigento* (prov. di Avellino). Giornale di Mineralogia, Cristallografia e Petrografia. Fasc. I, Vol. 4, 1893.

[4]) Debbo ringraziare il Dott. J. Friedlaender ed il Dott. A. Rittmann, che mi permisero l' uso del microscopio dell' Istituto Vulcanologico di Napoli.

[5]) L' intrusione della roccia in esame è più recente degli scisti eocenici incassanti ed è coeva o più recente del sollevamento, che costituì il crinale

escludono che la roccia possa rientrare fra i *diabasi*, comunque questo termine voglia intendersi. Ed è perciò che riferisco qui sullo studio eseguito dei campioni della roccia e degli scisti incassanti da me prelevati sul posto sin dal 1928.

Nè sembri superfluo precisare la natura petrografica dell' unico affioramento conosciuto di roccia ignea indiscutibilmente autoctona [6]) in una regione tanto favorevolmente indiziata come petrolifera [7]), oggi specialmente che alle intrusioni di masse ignee si attribuisce altrettanta importanza, quanta a tutte le altre « accidentalità tetto-« niche (fratture, faglie, pieghe diapire) nel favorire la salita e gli « spostamenti di idrocarburi » [8]). Tanto più che il termine di *diabase*, come é inteso da gran parte degli studiosi stranieri, potrebbe indurre a pensare ad avvenimenti paleozoici e quindi ben estranei a fenomeni del terziario ed ancor più a fenomeni postpliocenici [9]), quali, come sembra pacifico, sono spostamento e salita dei nostri idrocarburi.

Scisto siliceo

Riferisco intanto in questa prima nota sullo studio dello scisto incassante, riservandomi di trattare in una prossima nota lo studio della roccia ignea.

La roccia incassante il cosidetto *diabase* si presenta in piastre e scaglie a spigoli vivi e a superfici concoidi con colore grigio nell' interno. Le facce delle superfici, che suddividono la roccia in piastre, sono incrostate di limonite e psilomelano, i quali minerali costi-

---

spartiacque Frigento-Guardia e che il Galdi (pag. 88, op. cit.) ritiene eocenico. Allo stato però delle conoscenze nulla esclude che l' intrusione possa essere postpliocenica.

[6]) Va ricordato che, come in altre plaghe dell' Irpinia, in territorio di Paternopoli, Gesualdo e Mirabella Eclano si rinvengono depositi di tufi vulcanici (coerenti a Mirabella, ed incoerenti, « pozzolane », a Paternopoli e Gesualdo), la cui provenienza non ancora con sicurezza è stabilita. Ad ogni modo va però anche tenuto presente che l'affioramento in esame è sito poco lontano (a quasi un Kmetro) dalla classica Valle d' Ansanto, sede di mofete, per la cui descrizione rimando al Galdi (op. cit. pag. 92 e segg.).

[7]) Galdi — Op. cit. Nella zona, e precisamente nella valle NO di S. Angelo dei Lombardi, si sono già intrapresi importanti lavori di ricerca del petrolio.

[8]) Fabiani R. — *A proposito di una pubblicazione dell' American Association of Petroleum Geologists sul ritrovamento dei petroli nelle rocce eruttive.* Boll. dell' Associazione Mineraria Siciliana. Anno IX. n. 5-8. Palermo, 1933.

[9]) Galdi — Op. cit.

tuiscono uno straterello raggiungente i due millimetri ed avvolgente le piastre e che dà alla roccia la tinta bruno-rossastra, caratterizzante l'area di sviluppo di questi scisti tutti.

Le incrostazioni però formano anche venature nella roccia, riempendo cioè fratture, poi saldate, di essa.

In sezione sottile la roccia appare con una massa fondamentale limpida (a solo polarizzatore) a bassa rifrazione e bassissima birifrangenza, e nella quale sono riconoscibili ogni tanto granelli di quarzo determinabili con sicurezza. A solo polarizzatore questi granelli non sono distinti per rilievo o linea di Becke dalla massa fondamentale; dalla quale si distinguono bene soltanto a nicols incrociati.

L'indice di rifrazione di questa massa fondamentale è leggermente superiore a quello del balsamo di Canadà; a nicols incrociati, con lamina di gesso (rosso di 1° ordine) e forti ingrandimenti la massa si risolve in un aggregato minutissimo di particelle allungate con allungamento positivo. Ciò spiega la debolezza della birifrangenza dovuta al sovrapporsi, in uno stesso punto della sezione, di più individui diversamente orientati, oltre che alla presenza di sostanze amorfe.

Tutti questi caratteri fanno pensare che deve trattarsi di calcedonio, cui però debbono essere mescolate in discreta abbondanza sostanze argillose, la presenza delle quali è svelata dall'odore caratteristico emanato dalla roccia, quando su essa viene alitato e confermata dalla notevole quantità di Al_2O_3 che si riscontra nella soluzione di HCl c.c. della roccia (si intende, della parte solubile).

L'opale, per lo meno in parti visibili con l'immersione, deve escludersi, poichè sarebbe stato facilmente distinguibile mercè il suo basso indice di rifrazione (1.443).

Il minerale, che risalta nella massa, è un carbonato romboedrico, che si presenta talvolta in perfetti cristalli $(10\bar{1}1)$ o, più generalmente, in aggregati granulari degli stessi cristalli. Talvolta, specialmente i grandi cristalli, sono scheletriformi, racchiudendo all'interno granuli di quarzo.

Dai colori e dagli indici di rifrazione minimi (ε) si possono distinguere due carbonati romboedrici diversi. E precisamente, mentre alcuni rari cristalli sono incolori ed hanno un ε minore dell'indice del balsamo e sono perciò riferibili a calcite, dolomite o magnesite, altri, molto più abbondanti, sono pleocroici (dal giallo bigio chiaro a quello scuro), hanno un ε sensibilmente più alto del balsamo e sono perciò riferibili a siderite o piuttosto ad una miscela breunneritica prossima alla siderite. L'abbondanza del ferro, oltre all'Al_2O_3 ed alla silice colloidale, nonchè la presenza del magnesio e la assenza o quasi della calce accertate, per via chimica, nella soluzione cloridrica c.c,

della parte solubile, nonchè lo sviluppo soltanto a caldo di CO_2 confermano questo minerale.

Tracce riconoscibili di fossili in sezione sottile non si riscontrano, nonostante i più forti ingrandimenti; soltanto qualche singolare disposizione allungata curva o globulare di quarzo o breunnerite potrebbe far pensare a preesistenza di fossili, ormai però cancellati dalla ricristallizzazione.

Trattasi probabilmente di un fango di mare abbastanza profondo (scarsezza di $CaCO_3$) accumulato da resti in prevalenza silicei e poi metamorfosato durante il corrugamento e sollevamento appenninico, trasformandosi così in *ftaniti*.

Napoli, Gabinetti di Geologia Applicata e di Arte Mineraria del R. Istituto Superiore di Ingegneria, 15 maggio 1934 - XII.

Sull' affioramento della roccia detta « diabasica » in territorio di Frigento *(Prov. di Avellino)*

Nota II del prof. **F. Penta**

(Adunanza del dì 16 Giugno 1934-XII)

II.

Studio petrografico della roccia detta « diabasica »

La roccia si presenta macroscopicamente con una massa fondamentale compatta di un colore verde scuro, nella quale spiccano fenocristalli di plagioclasio dallo splendore vitreo e dal colore bianco; oltre di che, nella massa si notano cristalli di pirite talvolta di qualche millimetro, ma spesso riconoscibili ad occhio nudo soltanto per il caratteristico splendore e tinta. In sezione sottile la roccia si presenta costituita da un intreccio di plagioclasî e minerali femici quasi completamente cloritizzati; la roccia presenta tessitura ofitica.

Nella roccia si sono riconosciuti i minerali, che ordinatamente vengono qui descritti.

Plagioclasi. — Nella sezione si distinguono due tipi ben distinti di plagioclasî e precisamente un primo tipo, di gran lunga più abbondante, in cristalli molto sviluppati ma leggermente alterati ed un secondo tipo in piccoli e freschi cristalli.

I plagioclasî del primo tipo si presentano in cristalli prismatici appiattiti parallelemente a (010) formanti un intreccio, entro il quale sono distribuiti gli altri minerali, fra i quali, allo stato attuale della roccia, predominano le cloriti. Detti plagioclasî, che a solo polarizzatore appaiono leggermente bruni, sono alterati, ma non al punto da impedire la loro determinazione. Essi si presentano geminati secondo la legge di Albite insieme spesso con la legge del Periclino.

Sulla piattaforma del FÉDOROF e mediante il metodo delle zone del RITTMANN [1] ho potuto misurare in varie sezioni normali a (010) ed al piano del Periclino un estinzione variabile da $+ 16^{0}$ a $- 3^{0}$ al centro e da $- 8^{0}$ a $- 15^{0}$ all'orlo. E così pure, riferendomi alle sezioni di massima estinzione, ho potuto, in varie sezioni, confermare al centro un angolo massimo di $+ 16^{0}$.

A tali valori di estinzioni corrispondono, sui diagrammi del RITTMANN, percentuali di *An* dal 18 al 33 %, al centro; e dal 12 % a meno del 1 % di *An* all' orlo. Trattasi dunque di plagioclasî zonati, che dal tipo oligoclasio - andesina, al centro, passano fino ad un' albite pura all' orlo.

Va notato che la zona albitica, che circoscrive questi plagioclasî, è pochissimo spessa e si accentua specialmente al contatto col quarzo, il quale, pertanto, in questi punti deve ritenersi originario (di segregazione magmatica ed allotriomorfo rispetto ai plagioclasî).

Come ho detto, questi plagioclasî, spesso ricchissimi di inclusi di apatite, sono cosparsi di una polvere bruna costituita da minutissime particelle di minerali di alterazione, forse argillosa, le quali però, per quanto diffuse, non alterano i fenomeni ottici.

Ogni tanto in questi plagioclasî si infiltra della clorite ed in vari punti il plagioclasio stesso è completamente sostituito da clorite, la quale in questo caso si presenta sola e raramente accompagnata da granelli di epidoto.

I cristalli stessi di plagioclasio presentano dimensioni variabili da un minimo di mm. $0{,}079 \times 0{,}367$ ad un massimo di $0{,}527 \times 2{,}012$ con una media di mm. $0{,}22 \times 0{,}80$.

Il rapporto di allungamento fra lunghezza e larghezza va da un minimo di 2,5 ad un massimo di 4,5 con una media di 3,75. Questo plagioclasio primario, tenuto conto anche dei cristalli più o meno completamente cloritizzati, costituisce poco più del 50 % del volume della roccia, nelle sezioni studiate.

I plagioclasî invece del secondo tipo con dimensioni variabili, di

---

[1]) RITTMANN A. *Die zonenmethode.* Schweiz. Mineralog. u. Petrograph. Mitteilungen Band. IX, Heft. 1-1929.

poco, intorno ad una media 70 - 80 μ si presentano in cristalli limpidissimi xenomorfi, frammischiati a clorite, calcite e a qualche granello di quarzo secondario. Si presentano come albite quasi pura spesso in accrescimento parallelo col plagioclasio primario (epigenizzante).

In conclusione dunque per questi plagioclasi, salvo i pochi secondari, deve ritenersi che essi furono sin dall'origine assolutamente acidi; non può pensarsi cioè ad un'albitizzazione secondaria, in quanto che, là dove è avvenuta, essa è nettamente rivelata dalla limpidezza del minerale, il quale invece è bruno e sembra impolverato nella gran parte, là dove conservò il grado di miscela originario, mentre, ripeto, diventa limpido e scevro dalla polvere bruna in ristrette zone degli estremi orli, là dove l'albitizzazione secondaria invece avvenne. Oltre si intende la zonatura già avanti cennata, dovuta esclusivamente alla differenziazione magmatica durante il raffreddamento.

Quarzo. — Nella sezione si riscontrano granuli di quarzo, attraversato da fini aghi di apatite, xenomorfo riempente gli interstizi fra i plagioclasî. Esso quarzo non presenta alcuna anomalia, deve ritenersi di origine primaria, e forma circa l' 1 °/₀ del volume della roccia nella sezione esaminata.

Oltre questo quarzo vi sono dei granelli dello stesso minerale frammischiati ai prodotti di alterazione (clorite, epidoto, calcite, ecc.) e che perciò probabilmente debbono ritenersi di origine secondaria.

Apatite. — L'apatite si presenta in prismi molto e talvolta estremamente allungati, di cui uno per es. di 1,5 mm. × 0,02 mm. con sfaldatura basale distinta, spesso rotti in due pezzi. Si trova inclusa in tutti i minerali, compreso i minerali di ferro, ad eccezione soltanto della calcite ed analcime. (la larghezza dei prismi va da 0,04 mm. a 0,014 mm.).

Biotite. — In qualche raro relitto la biotite è ancora fresca e lascia vedere la sfaldatura ed il tipico pleocroismo dal giallo-bruno al giallo pallido e l'alta birifrangenza; in generale è completamente cloritizzata, lasciando vedere però tutti i termini di passaggio, i quali consistono nella perdita della forte birifragenza, quindi nel cambiamento delle tinte di pleocroismo, le quali virano verso il verde oliva intenso, ed infine nella perdita delle tracce della sfaldatura, fra le lamine delle quali va ad infiltrarsi ed interporsi la clorite.

I relitti di biotite riconoscibili variano dai 0,2 ai 0,3 mm. di larghezza, mentre le primitive biotiti, riconoscibili dalla clorite, pseudomorfica nel modo che si dirà, variavano da poco più di mezzo millimetro ad oltre un millimetro.

Epidoto. — L'epidoto si presenta in granelli ellittici allungati e raramente in tozzi e mal formati prismi leggermente giallognoli, a

forte rilievo ed a forte birifrangenza (0,035). Si trova mescolato alla clorite e calcite come prodotto di alterazione specialmente di anfibolo; abbonda cioè nelle zone di evidente provenienza da anfiboli, ai quali si accennerà a proposito della clorite. È raro invece nelle zone di clorite proveniente spiccatamente dalla biotite e manca quasi completamente nelle pseudomorfosi da plagioclasio.

Clorite. — Nella sezione si rinvengono tre tipi nettamente distinti di clorite. Un primo tipo caratterizzato dalla immancabile concomitanza con l'epidoto e che a nicols incrociati dà la caratteristica anormale colorazione bleu della pennina ed un secondo tipo, normale, o a leggera tinta bleu a nicols incrociati, raramente accompagnato da pochissimo epidoto. Un terzo tipo infine, ma meno abbondante, che sostituisce il plagioclasio.

I tre tipi sono relativi a pseudomorfosi ben distinte e precisamente il primo tipo costituisce buona parte del minerale di una pseudomorfosi secondo anfibolo, il secondo pseudomorfosi secondo biotite e il terzo secondo plagioclasio.

a) *Pseudomorfosi secondo anfibolo.* — Nel primo tipo infatti il pleocroismo della clorite va da un verde azzurrognolo ad un verde pallido; a nicols incrociati si nota l'anomalia delle tinte d'interferenza che dà il bleu caratteristico della pennina; è costante la paragenesi con albiti di neoformazione, epidoto, calcite ed ogni tanto finanche con granelli di quarzo.

Le cloriti di questo tipo inoltre costituiscono spesso sezioni schiettamente esagonali, nelle quali talvolta è visibile la rete a maglia di 56° [1]) circa degli anfiboli, generata dall'infiltrazione, in un primo momento di clorite, nelle sfaldature dell'anfibolo. In tali sfaldature la clorite, essendosi disposta a scaglie orientate, produce delle estinzioni quasi rette, che, con opportuna disposizione dei nicols, determinano una rete luminosa nella sezione bleu del minerale. — Si nota cioè le tessitura detta a finestra o reticolo (Balken o Fensterstruktur). I granelli di epidoto o sono disseminati irregolarmente in questa prima clorite o si trovano accumulati agli orli delle pseudomorfosi, in qualche caso si trovano disposti lungo un sol piano, probabilmente quello di geminazione (100) del primitivo anfibolo, dividendo in due parti quasi eguali la sezione. In queste pseudomorfosi non si rinviene traccia di sostanza del primitivo anfibolo, salvo un piccolo relitto (mm. 0.066) di anfibolo pleocroico, da verde oliva a verde scuro. In

[1]) Tale angolo è stato determinato misurando sul Fédorof le coordinate delle normali alle due giaciture e calcolando sul cannavaccio l'angolo corrispondente.

qualcuna di queste pseudomorfosi secondo anfibolo la clorite a sua volta è quasi completamente scomparsa, restando solo calcite, albite ed epidoto. Le cloriti provenienti da anfibolo presentano sezioni variabili da 0,300 mm. a 1,20 mm. ed altezze di prismi da 0,500 mm. a 1,50 mm. circa.

b) *Pseudomorfosi secondo Biotite.* — Nel secondo tipo, pseudomorfosi secondo biotite, è invece presente quasi sempre traccia più o meno visibile della primitiva biotite con tutti i passaggi già indicati parlando della biotite stessa. Il pleocroismo della clorite è qui più intenso e va dal verde azzurrognolo (ma meno azzurrognolo che nella prima) al verde giallastro. I colori di interferenza della clorite stessa, che sono quasi del tutto normali (grigi) e, solo raramente notandosi una debole tinta bleu, permettono stabilire che qui trattasi del tipo di clinocloro o proclorite.

La clorite medesima si presenta molto spesso in scaglie riunite a rosetta: le quali scaglie in alcuni punti sono così piccole che, sovrapponendosi in massa, determinano una isotropia statistica. Spesso poi le rosette sono riunite fra loro in aggregati radiali dal contorno più o meno rotondeggiante.

Tale disposizione a rosetta peraltro non è nuova neanche nelle stesse biotiti come per es. si riscontra nella biotite della Diorite di Reichenbach nell'Odenwald.

Queste pseudomorfosi seconde biotite sono formate quasi esclusivamente da clorite con pochi ossidi di ferro, che si presentano in piccoli granelli opachi con accenni di forme ottaedriche od anche in piccoli granelli o paglie un po' più grandi trasparenti agli orli e quivi con tinta rosso-bruna; i primi riferentisi probabilmente a magnetite, i secondi ad ematite. Questi minerali di ferro si concentrano specialmente agli orli delle pseudomorfosi secondo biotite. La calcite e l'epidoto mancano per lo più completamente in questo secondo tipo di pseudomorfosi.

c) *Pseudomorfosi secondo plagioclasio.* — Parlando del plagioclasio, si è accennato a questo terzo tipo di pseudomorfosi, in cui oltre la clorite generalmente non si trovano altri minerali, al di fuori di rari granelli di epidoto.

In conclusione la clorite proviene dall'alterazione di anfibolo e di biotite restando esclusa la provenienza da augiti. Le augiti perciò, allo stato non rintracciabili comunque nella roccia, vanno escluse completamente fra i componenti primarî della roccia in esame.

Analcime. — In un punto della sezione lo spazio fra i plagioclasî primarî è riempito da una sostanza quasi del tutto isotropa (con birifr. minore di 0.001) con indice di rifrazione poco superiore a quello

minimo (ε) della calcite, dalla quale in venule è attraversata, del tutto incolore e con una sfaldatura spiccatamente cubica (misurata sul Fèdorof); tale sostanza non può essere che analcime d'origine secondaria.

Questa analcime si trova però anche in altri punti della sezione insieme con la calcite, ma quivi non lascia vedere le anomalie ottiche cennate.

Ma per essa, come per la calcite, deve ritenersi un'origine posteriore anche a quella dei minerali secondari cennati.

MINERALI OPACHI. — I minerali metallici presenti nella sezione sono la magnetite, parzialmente idrossidata in göthite, in ottaedri o in granelli più o meno informi, ilmenite in cristalli appiattiti a contorno esagonale ma per lo più scheletriformi, e pirite che forma accumuli irregolari nella sezione, ma piccoli cristalli cubici nelle cavità della roccia, e visibili per buona parte anche ad occhio nudo.

Importante è la circostanza, contraria al caso normale, per cui mentre la magnetite è parzialmente trasformata in idrossidi del tipo göthitico, la ilmenite e la pirite sono poco o niente alterate.

La pirite è dovuta probabilmente ad un processo pneumatolitico-idrotermale analogo alla propilitizzazione ed a cui si deve anche la cloritizzazione della roccia con la neoformazione di albite e quarzo secondari.

La composizione mineralogica volumetrica della roccia originaria, dalle misure eseguite, può ritenersi approssimativamente del tipo seguente:

1°) — plagioclasio (oligoclasio-andesina)	52 %
2°) — quarzo	1 %
3°) — anfibolo	32 %
4°) — biotite	9 %
5°) — apatite	1-1/2 %
6°) — pirite, magnetite ed altri minerali di Fe e Ti	4-1/2 %
TOTALE	100 %

La composizione attuale della roccia può ricavarsi, sempre in via del tutto approssimata, sostituendo all'anfibolo, a quasi tutta la biotite ed al 5 % circa del plagioclasio la clorite e tenendo conto delle sostanze d'alterazione, forse argillosa, inquinanti i plagioclasi, nonchè dell'idrossidazione di buona parte della magnetite, che costituisce il 50 % circa dei minerali opachi del n. 6. Ma tutto ciò non avrebbe importanza, come invece ha importanza la composizione mi-

neralogica originaria surriportata, la quale, benchè approssimata, permette di classificare con sicurezza la roccia originaria nella famiglia delle *dioriti* ed escludere che rientri nella famiglia delle rocce *gabbriche*, dato il carattere acido del plagioclasio. Di conseguenza resta escluso che si possa parlare di *diabase*, visto che presupposto fondamentale per tale nome, oltre la basicità del plagioclasio [1]), è la predominanza del pirosseno sugli altri femici: pirosseno che invece nella roccia in esame non s'è riscontrato.

Data la tessitura ofitica e la giacitura in dicco e non conoscendosi la profondità originaria della sede di intrusione o per lo meno della zona del dicco oggi affiorante, sarebbe arbitrario parlare di roccia intrusiva o di roccia effusiva ed è perciò che conviene limitarsi, pur mantenendosi petrograficamente precisi ed esaurienti, a dire che si tratta dell'affioramento di un dicco di DIORITE OFITICA CON BIOTITE (*biotite-diorite ofitica* secondo la terminologia tedesca [2])), anche tenendo conto del contenuto totale di minerali femici [3]).

Napoli, Gabinetti di Geologia Applicata e di Arte Mineraria del R. Istituto Superiore di Ingegneria, maggio 1934 - XII.

---

[1]) Tutti gli autori sono concordi nel riservare il nome di diabase alle rocce caratterizzate dalla predominanza, fra i salici, dei plagioclasî basici; e fra i tanti anche i nostri trattatisti (ARTINI, PRINCIPI, ROVERETO ecc.).

[2]) RITTMAN A. — *Sulle rocce italitiche del Somma - Vesuvio.* Bull. Volcanolog., VII Ann., n. 23 a 26 del 1930. Napoli, 1934.

[3]) NIGGLI P. — *Die quantitative mineralogische Klassification der Eruptivgesteine.* Schw. Min. u. Petr. Mitt. B. XI, H, 2. Zurigo, 1931.

OSSERVAZIONI PETROGRAFICHE SULLE QUARZODIORITI DI NICOTERA, PALMI, SEMINARA E BAGNARA (*prov. di Reggio Calabria*)

Nota del prof. **F. Penta**

(Adunanza del dì 16 giugno 1934 - XII)

Sunto. — Si comunicano i risultati dello studio petrografico di campioni di rocce quarzodioritiche, provenienti dalle seguenti località, tutte lungo la linea ferroviaria di Reggio Calabria:

1. Comune di Nicotera-Cava Nicotera, Cantieri verso Battipaglia (roccia chiara)
2. » » » » » » » Reggio Cal. » »
3. » » » » » » » » » » »
4. » » » » » » » » » (» scura)
5. » » Palmi » Pietrosa, vicino alla Staz. di Palmi (roccia scura)
6. » » Seminara » Janculla (tra Palmi e Bagnara) » »

CAVE NEL COMUNE DI NICOTERA

Lungo la linea ferrata fra la stazione ed il paese di Nicotera affiorano numerosi blocchi di roccia quarzodioritica dagli spigoli arrotondati immersi in un materiale della stessa natura, ma profondamente alterato. Le varie cave aperte in questa roccia oggi sono inattive. Riporto qui i risultati dello studio su campioni di 4 di questi blocchi.

1.°

CAVA NICOTERA — **Cantieri verso Battipaglia**

In questi cantieri non v'è più lavorazione, perchè si è raggiunto il limite d'espropriazione da parte delle FF. SS.

Roccia chiara costituente un masso continuo largo quasi 60 metri, alto 12 e che verso monte si riduceva in larghezza ed altezza. Macroscopicamente la roccia si presenta molto fresca, con tessitura granitoide tipica; nella massa fondamentale bianca, nella quale ad occhio nudo sono distinguibili plagioclasi e quarzo, sono diffusi cristalli di mica scura, che, da pochi millimetri, raggiungono finanche il centimetro o quasi.

Il peso dell'unità di volume della roccia, media di 4 determinazioni, risulta di 2,86.

Il potere di imbibizione, dopo 90 giorni di immersione in acqua comune, risulta di 0,2% in peso della roccia (media di 4 determinazioni).

La roccia è stata adoperata per pulvini, marciapiedi, ponti e coronamenti, sia dalle Ferrovie dello Stato, che dall' Amministrazione Provinciale nel tratto Reggio-Nicotera. Fu usata anche per scogliere.

Sezione sottile

La tessitura della massa fondamentale, eccezion fatta per gli accessorî: epidoto e zircone, è panallotriomorfa, passante alla granitica, ove la biotite tende però verso l'idiomorfismo.

I minerali riscontrati nella sezione sono: plagioclasi, quarzo, biotite con zircone ed epidoto.

Plagioclasii

In cristalli allotriomorfi con accenno di idiomorfismo nei punti di contatto con il quarzo.

Detti plagioclasî sono stati determinati in sezioni normali a [100] o alla direzione *P*. Si sono avuti i valori degli angoli di estinzione, fra (010) ed n_α, che si riportano ed a cui corrispondono le percentuali di molecole anortitiche, secondo il diagramma del Rittmann [1]), a fianco segnate. Come pure si riportano qui le differenze di letture e di miscele corrispondenti riscontrate per effetto della zonatura dei plagioclasi stessi.

	estinzioni (010): n_α	% molecole di Anortite
centro	$23^\circ \div 26^\circ$	$41\% \div 46\%$
orlo	$17^\circ\frac{1}{2} \div 20^\circ$	$34\% \div 37\%$

I plagioclasi in esame rientrano dunque fra le andesine e precisamente fra le andesine basiche con orli di andesine acide.

Geminazione — La legge di geminazione costante nei plagioclasi della roccia è quella dell' *Albite*, accompagnata o no da quella del *Periclino*. I più piccoli cristalli scendono fino a $100\mu \times 100\mu$; in media oscillano intorno al millimetro; ma molti sorpassano i 3-4 mm.

Alcuni di essi plagioclasî sono formati da due grandi individui geminati secondo Periclino, contenenti scarse e sottili lamelle secondo

---

[1]) Rittmann A., *Die Zonenmethode.* Schw. Min. u. Petr. Mitt. B. IX, H. I. Zürich, 1929.

Albite. In alcuni cristalli di plagioclasio si presentano inclusi picco-
issimi ($< 20\mu$) di quarzo, riconoscibili mediante il piatto di Féderof.

Biotite

In cristalli in gran parte allotriomorfi.

Uniassica negativa — La birifrangenza, determinata col compen-
satore girevole di Bereck, con l'approssimazione compatibile con il
noto inconveniente presentato dalla superficie delle sezioni normali
alla sfaldatura, è risultata di 0,050; agli orli del preparato tale biri-
frangenza è risultata maggiore (0,057) ma forse per il minore spessore
della mica, elastica, in confronto a quello del quarzo adiacente. Si
nota in questa mica qualche incluso piccolissimo (alcuni di 6-7μ) di
zircone con alone di forte pleocroismo.

Questa mica è presente nella roccia in cristalli che, da appena
poche decine di micron (misurati fino a 30μ), vanno a raggiungere
quasi il centimetro.

Epidoto

L'epidoto si presenta in cristalli allungati secondo [010] e legger-
mente appiattiti parallelamente alla base (001). La sfaldatura (001)
nelle sezioni parallele a (010) si presenta netta ed attraversante tutto
il cristallo; l'altra invece (100) non è nè così netta nè così continua
come la prima. Il minerale in esame si presenta però anche in granuli
più o meno allungati, ogni tanto raggruppati fra loro.

È quasi incolore, salvo leggerissimo tono giallognolo, sensibile sol-
tanto se paragonato all'adiacente quarzo. L'assenza riscontrata inoltre
di pleocroismo apprezzabile appare abbastanza strana, specie in consi-
derazione della ricchezza di molecole ferrifere, accertate con le misure
ottiche di cui in seguito.

La birifrangenza massima ($n_\gamma - n_\alpha$) è stata determinata con il
compensatore di Bereck [1]) su una sezione rigorosamente orientata
(perpendicolare alle due sfaldature).

La compensazione in luce bianca non è completa ma riconoscibile
per il decrescere delle tinte di interferenza, anche esse più o meno
anomali, in vicinanza della posizione di compensazione. In tali adia-
cenze, dopo il passaggio del bianco di 1.° ordine, si vede prima una
tinta violacea, invece del grigio oscuro, la quale passa poi immedia-
tamente ad una tinta verdastra (verde sporco), non appena passata
la compensazione.

---

[1]) Bereck M., *Mikroskopiche Mineralbestimmung mit Hilfe der Universal-
drehtischmetthoden*. Berlin, 1924.

Tale fatto è dovuto alla dispersione della birifrangenza abbastanza accentuata nel gruppo degli epidoti.

Così il GOLDSCHLAG ha trovato una dispersione della birifrangenza con $\rho < v$ nell'epidoto di Pfarrerb e con $\rho > v$ in quello di Rauhbeerstein; risultando in ambedue i casi colori di interferenza anomali e precisamente « sopranormali » nel primo caso e debolmente « sottonormali » nel secondo.

Interessava perciò di stabilire, per lo meno qualitativamente, in quale caso ricadesse l'epidoto in esame. Misurando a luce monocromatica con i filtri LIFA, ho potuto accertare che per il rosso ($\lambda = 630$) la birifrangenza è più alta che per il giallo e, passando per un minimo nel verde ($\lambda = 510$), ritorna ad un valore praticamente identico a quello del rosso nella luce bleu ($\lambda = 435$).

Questo minimo interposto fra ρ e v fa perdere quindi ogni interesse a stabilire se $\rho \gtreqless v$.

Per i risultati delle ulteriori ricerche da me eseguite sulla birifrangenza massima di questo epidoto rimando ad una nota [1]) pubblicata l'anno scorso. In questa nota riferivo sulla variazione riscontrata del valore della birifrangenza detta col variare della lunghezza d'onda della luce e, stabilito come in una rappresentazione piana cartesiana $(\lambda, \Delta_{max.})$ la legge di variazione è espressa da una curva, pensavo che a commisurare il tipo di dispersione potesse prestarsi un indice del tipo:

$$\frac{\Delta_G - \Delta_{min.\ o\ max.}}{\Delta_B - \Delta_{min.\ o\ max.}} \qquad (1)$$

ove le Δ, s'intende, sono sempre quelle misurate nella sezione di massima birifrangenza.

Illustrai allora con una tavola i diversi valori che questo indice assume per i diversi tipi di curve rappresentative.

Volendo però che questo indice riveli l'effetto fisiologicamente sensibile della dispersione di birifrangenza, bisogna che numeratore e denominatore della (1) vengano divisi per la birifrangenza media, visto che uno stesso scarto di birifrangenza, insensibile all'occhio in

---

[1]) PENTA F., *Ricerche sulla dispersione relativa della birifrangenza massima di un epidoto e sui limiti di utilizzabilità del numero* $\frac{\Delta_D}{\Delta_F - \Delta_C}$, *N dell'Ehringhaus*. Periodico di Mineralogia. Anno IV, n. 1, gennaio 1933 - XI.

A tal proposito va notato che la cava, di cui il campione studiato, non è sita in territorio di Bagnara, come per errore nella nota fu detto, ma in quello di Nicotera.

regioni di alta birifrangenza, diventa spiccato, quando i valori delle birifrangenze relative alle varie luci si mantengano in un ordine basso. E perciò in pratica conviene riferirsi all'indice, che possiamo indicare con:

$$\mathfrak{z} = \frac{\dfrac{\Delta_G - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}}}{\dfrac{\Delta_B - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}}} . \qquad (2)$$

Sempre però con l'avvertenza che il rapporto fra:

$$\frac{\Delta_G - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}} \quad \text{e} \quad \frac{\Delta_B - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}}$$

non deve essere eseguito, mentre vanno eseguite le operazioni:

$$\frac{\Delta_G - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}} \text{ e le analoghe:}$$

$$\frac{\Delta_B - \Delta_{\text{min. o max.}}}{\Delta_{\text{med.}}} .$$

Per farmi un'idea del contenuto di molecola ferrifera nello epidoto in esame mi sono riferito alla tabella compilata dal Mügge (pag. 626, Ediz. 1925 della 2.ª parte del I vol. della *Mikroskopische Physiographie* di Rosenbusch-Mügge) e precisamente rilevando i valori di $c:n_\alpha$, Δ, $2V_{n\alpha}$, e di ω', angolo tra l'asse ottico A e la normale a (001), misurato direttamente nel cristallo.

Servendomi della piattaforma del Fédorof, ho trovato come angolo di estinzione fra n_α e la sfaldatura (001):

$$c:n_\alpha = \begin{cases} \text{al centro del cristallo } 4^0\frac{1}{2}\text{, nell'angolo } \beta \text{ acuto, cioè: } -4^0\frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{secondo l'uso di Mügge} \\ \text{all'orlo} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad 1^0\frac{1}{2}\text{, nell'angolo } \beta \text{ acuto e cioè: } -1^0\frac{1}{2} \end{cases}$$

È da notare che indizi di dispersione della bisettrice acuta nel nostro caso sono da escludersi.

La birifrangenza, Δ, media (media di quelle riscontrate alle diverse luci e praticamente molto prossima a quella rilevata a luce bianca) è risultata di 0,043, determinata in base al ritardo medio di vari grani di quarzo, all'uopo perfettamente orientati, sparsi all'ingiro nelle adiacenze dell'epidoto. S'è evitato così la misura di-

retta dello spessore che dà sempre risultati meno precisi, in tali determinazioni.

L' angolo, $2V$, degli assi ottici è stato dèterminato sia direttamente, rilevando sul Fédorof le coordinate polari di n_β ed n_α o n_γ e di uno degli assi ottici, riportando tutto sul cannavaccio, previa riduzione per effetto della diversa rifrazione del minerale e vetro (correzioni piccole perchè l' indice del vetro usato era di 1,7174) sia col metodo del Bereck [1]) utilizzando l' angolo di estinzione caratteristico nella sezione egualmente inclinata agli assi dell' indicatrice.

Si è trovato così un angolo di —72°. L' ω' risulta quindi di 6° al centro e di 9° all' orlo.

A tutti i risultati di misure su riportati corrisponde nella tabella cennata un contenuto di molecole d' epidoto ferrifero (°/₀ Fe—E) di circa 30 °/₀ e cioè una Pistazite, secondo Niggli [2]).

Le dimensioni di questi granelli e cristalli di epidoto vanno da un minimo di un centinaio di micron, grandezza questa predominante, ad un massimo di circa 1/2 mm., qual' era, per es., quello utilizzato per lo studio della birifrangenza e delle altre caratteristiche ottiche.

Quarzo

Il quarzo, oltre che come riempitivo dei vuoti fra i plagioclasî e cioè in granelli, che da un minimo di cento micron, con una media intorno al millimetro, arrivano a più di 3-4 mm., si trova pure come inclusi piccolissimi ($<20\mu$) nei plagioclasî.

Composizione volumetrica quantitativa

Dalle misure eseguite nelle sezioni si è ricavato la seguente composizione volumetrica, che però deve assumersi come approssimata, data la grandezza dei singoli cristalli e specialmente della biotite:

plagioclasî . . .	60 °/₀ . . .	4,8/8 . . .	6/8 dei salici
quarzo.	20 °/₀ . . .	1,6/8 . . .	2/8 » »
			8/8
biotite	18 °/₀	. . 1,6/8	
epidoto	2 °/₀		
totali	100,°/₀	8/8	

Da cui si deduce che la roccia rientra fra le *quarzodioriti* ad

---

[1]) Bereck M., op. cit.

[2]) Niggli P., *Lehrbuch der Mineralogie. II. Spezielle Mineralogie.* pag. 624-625. Berlino, 1926.

epidoto primario della classifica del NIGGLI [1]), anche tenendo conto della circostanza che i femici rappresentano appena 1,6/8 del volume totale della roccia.

2.°

CAVA NICOTERA, cantieri verso Reggio Calabria.

Roccia chiara: non è continua in sede, ma si presenta in blocchi isolati di 20-40 tonn. ciascuno.

Il peso dell' unità di volume della roccia, media di due determinazioni, risulta di 2,71.

Il potere di imbibizione, dopo 90 giorni di immersione in acqua comune, risulta di 0,25 °/₀ in peso della roccia (media di 4 determinazioni).

Per gli usi della roccia vedi il numero precedente.

SEZIONE SOTTILE

I minerali riscontrati in ordine di abbondanza sono: plagioclasio, quarzo, epidoto, biotite, muscovite, apatite inclusa nel plagioclasio in prismi allungati negativi. In ordine di segregazione si ha invece: apatite, muscovite, biotite, epidoto, plagioclasio, quarzo.

PLAGIOCLASIO

In cristalli generalmente allotriomorfi, del tipo andesitico da acido a basico, con lamelle di geminazione secondo le leggi di Albite, Periclino, Carlsbad e complessa Carlsbad-albite.

Presenta piccoli inclusi di microclino, ed inclusi più grandi di quarzo, oltre inclusi di epidoto, e di biotite e apatite. Gli inclusi di microclino si presentano in generale con forme cristalline nelle quali (010) è sempre bene sviluppata, come spesso anche quella (001): sono in genere appiattiti parallelamente a (010); se ne trovano alcuni che, mentre da un lato sono limitati da (010), dall' altro penetrano con contorni irregolari nel plagioclasio.

Tutti questi inclusi di microclino sono orientati cristallograficamente paralleli al plagioclasio ospite, come si è potuto constatare applicando il « metodo delle zone » del RITTMANN sulla zona normale a (010). In tale zona il microclino presenta un' estinzione massima di circa 17°, la regione di quest' estinzione massima estendendosi per

[1]) NIGGLI P., *Die quantitative mineralogische Klassification der Eruptivgesteine.* Schw. Min. u. Petr. Mitt. B. XI, H 2. Zurich 1931.

oltre un 50^{0} e cioè da $\lambda = 0^{0}$ a $\lambda = 50^{0}$, ove λ è una delle coordinate sul piano normale a [001].

Per la gran parte questi inclusi microclinici sono stati riconosciuti per mezzo delle su esposte misure ottiche, sul Fédorof, e confermati con la linea di BECKE; in alcuni si vedono poi addirittura le caratteristiche lamelle di geminazione secondo la legge di Albite e quella del Periclino, col piano però di associazione di questo ultimo normale a [100], come già ebbi a determinare in un microclino di Parghelia [1].

Gli inclusi di quarzo invece si presentano sempre con forme irregolari ed alcuni inoltre dànno l'impressione di essere corrosi al contatto con il plagioclasio ospitante.

QUARZO

Il quarzo si presenta con pochi inclusi, non è per niente cataclastico e dà estinzioni leggermente ondulate.

EPIDOTO

L'epidoto si trova, assieme con la biotite, in cristalli idiomorfi, spesso completamente inclusi nei plagioclasî. Al contatto coi plagioclasî o col quarzo più frequentemente è corroso; i contatti però sono netti e nelle adiacenze i plagioclasî sono completamente freschi. Dalle proprietà ottiche, concordi tutte con il comportamento alla compensazione, si può stabilire che l'epidoto varia da un tipo con ↩ 15 % di mol. di epid. ferrifero al tipo con ↩ 30 %, riscontrato già nella precedente roccia. Per il tipo di epidoto più clinozoisitico si è stabilito:

$2V = $ ↩ 94^{0} (riconosciuto mediante le isogire quasi completamente rettilinee).

Birifrangenza: procedendo verso la compensazione, al grigio di compensazione precedeva il bleu e seguiva il rosso, si estingueva prima il rosso e poi il bleu, senza minimi o massimi perchè la tinta di compensazione non si allontanava dal grigio. Il rosso si compensava a 10^{0} del compensatore Berek cui corrispondeva un ritardo di 240 e $B = 0{,}0085$ il ↩ bianco si compensava a 12^{0} del comp. Berek, cui corrisponde un ritardo di 350 e $B = 0{,}0125$; il bleu si compensava a 14^{0} del comp. Berek, cui corrisponde un ritardo di 480 e $B = 0{,}017$.

La birifrangenza dunque a luce ordinaria è di circa 0,0125.

Mediante tale valore della birifrangenza a luce bianca e l'angolo

---

[1]) PENTA F., *Studio petrografico della pegmatite di Parghelia* (*Catanzaro, Calabria*) *con osservazioni sulle leggi di geminazione di Periclino nell' albite e nel microclino.* Schw. Mineral. u. Petr. Mitt. B. 13, 1933.

$2V = 90^0$ si è potuto assodare la composizione chimica su riportata in base alla tabella del NIGGLI [1]).

Dai su esposti valori dei ritardi (non occorrendo qui conoscere lo spessore) si ricava per l' N dell' Ehringhaus il valore:

$$\frac{1}{N} = \frac{480-240}{350} = \backsim 0{,}7 \qquad \text{con} \qquad N = \backsim 1{,}4$$

si ha cioè il carattere di fortemente sopranormale.

Il valore di ϑ [2]) relativo invece risulterebbe di:

$$\frac{480/350-240/350}{0} = \frac{0{,}70}{0} \text{ che, espresso in percento, dà } \vartheta\,{}^0/_0 = \frac{70}{0}\,.$$

Per il tipo invece di epidoto più ferrifero si è potuto stabilire che non si sorpassano le condizioni di quello già studiato nella precedente roccia; si può anzi dire che trattasi dello stesso tipo (al $30\,{}^0/_0$), essendosi ritrovate le stesse proprietà ottiche e l'identico comportamento alla compensazione (si è misurato una $B = 0{,}044$ per $R = 1250$).

MUSCOVITE

Con $2V = -28^0 \div -40^0$ e $\Delta = \backsim 0{,}04$; è anche inclusa nel plagioclasio e più di raro nel quarzo, in grandi cristalli ben formati spesso associati alla biotite, però non in associazione parallela con questa. Questo modo di presentarsi dimostra la natura primaria del minerale, il che ha un importantissimo significato per la genesi della roccia.

Presenta Δ_m anche all' intorno di 0,040 come nella biotite: il colore di interferenza qui è netto (bleu di 3.° ordine), mentre nella biotite è verdastro per il colore proprio brunastro.

BIOTITE

$\Delta_m = \backsim 0{,}04$: forte pleocroismo e precisamente bruno grigiastro scuro lungo γ, beige debolissimo lungo α e bruno olivastro lungo β.

Che ci sia una differenza di assorbimento dei raggi che vibrano parallelamente a γ e di quelli paralleli a β, è concorde col fatto che $2V$ è abbastanza diverso da 0^0, variando fra 12^0 e 15^0. Presenta anomalie a luce convergente (bleu).

---

[1]) NIGGLI P., *Lehrbuch der Mineralogie.* op. cit., pag. 624-625.

[2]) Vedi pag. 129.

COMPOSIZIONE MINERALOGICA VOLUMETRICA QUANTITATIVA

Quarzo	41,5 %	94,5 %
Plagioclasi	53 %	
Biotite	2,5 %	5,5 %
Epidoto	2 %	
Muscovite	1 %	
Titanite	tracce	
Apatite		
Totale	100,00	

3.°

CAVA NICOTERA, **cantieri verso Reggio Calabria**

Roccia chiara proveniente da masso diverso da quello delle precedenti. L' aspetto macroscopico vi si avvicina molto, però è meno fresco, come meglio lo studio della sezione sottile lascia vedere, in dipendenza delle vene di calcite e della cloritizzazione della biotite.

Il peso dell' unità di volume è 2,725 (media di 2 determinazioni).

Il potere di imbibizione è 0,17 % (» » »)

Per le applicazioni vedi i numeri precedenti; oggi è adoperata anche come pietra da taglio, specie per cantonate.

SEZIONE SOTTILE

In sezione sottile si rivela come una roccia leucocrata, ricca di quarzo, che raggiunge quasi la quantità di andesina. È tipicamente protoclastica (per pressioni agenti sul magma durante la sua consolidazione) come lasciano vedere specialmente gli stati del quarzo, plagioclasio e vuoti miarolitici riempiti attualmente da calcite.

Si descrivono i minerali riscontrati:

QUARZO

Presenta estinzione fortemente ondulosa; in vari punti è addirittura cataclastico con « mörtelstrukture ». Indizi questi di azioni dinamiche sulla roccia.

PLAGIOCLASII

Andesina che di rado include microclino, con lamelle di geminati spesso leggermente incurvate o addirittura spezzate. Le fessure così formate nell' andesina sono riempite da quarzo che è orientato paral-

elamente ai grani di quarzo primario adiacente. La stessa andesina i trova pure frantumata in pezzi angolosi ricementati da un plagio-lasio di pochi °/₀ più albitico (olig.-and.), al quale l'andesina stessa assa rapidamente, ma gradualmente.

Muscovite

È abbondante; primaria. È l'elemento femico predominante, in cristalli idiomorfi rispetto a quarzo e plagioclasio e spesso associati con biotite.

Biotite

Alcune biotiti sono più o meno cloritizzate con formazione di titanite secondaria. La biotite è pleocroica da rosso marrò a grigio chiaro: in alcuni punti è completamente trasformata in una clorite pleocroica da verde pallido a giallognolo chiaro con colori di interferenza bassi ed appena anormali.

Zircone e Rutilo

Si trova zircone in prismi tozzi bipiramidati e qualche aghetto di rutilo.

Apatite

L'apatite e un pò più abbondante déll'epidoto primario.

Epidoti primari

Sono molto rari; si trovano in piccoli cristalli inclusi nel plagioclasio: di tipo sempre pistazitico come nella roccia n. 1.

Minerali secondari

Epidoti più poveri di ferro, ogni tanto zonati con zone che si avvicinano alla clinozoisite senza raggiungerla.

Calcite: prodotto secondario, che riempie i vuoti miarolitici fortemente deformati dalle azioni dinamiche esercitatesi sulla roccia: spesso costituisce venule.

Clorite: (spesso vicino alla calcite): vedi biotite.

Titanite: si trova qua e là in piccoli cristalli fusiformi.

Composizione mineralogica volumetrica quantitativa

Quarzo	35,7	94,70
Plagioclasî	59,0	
Muscovite . , . .	2,5	5,30
Biotite	1,9	
Clinocloro	0.3	
Calcite	0,3	
Titanite	0,2	
Apatite	0,1	
Zircone	tracce	
Totale	100,00	

4.°

CAVA NICOTERA, **cantieri verso Reggio Calabria**

Roccia scura proveniente da masso analogo a quello della roccia n. 3: all' esame macroscopico si presenta come una roccia a grana media, mesocrata, nella quale ad occhio nudo si può distinguere quarzo, plagioclasi, biotite bruno-rossastra e orneblenda verde-scura. Qua e là si scorge qualche piccolo granello marrò-olivastro che, come dimostra poi la sezione sottile, va attribuito ad epidoto. Lo stesso può dirsi per i piccolissimi granelli marrò-arancione di titanite e per i prismetti grigiastri dell' apatite. La tessitura macroscopica è granitoide con un debole accenno alla scistosità lenticolare (miche parallele ed altri minerali formano « occhio ») dei *gneiss occhiatini:* e ciò è in relazione con la cataclasi visibile nelle sezioni sottili.

Il peso pell' unità di volume è 2,83 (media di due determinazioni).

Il potere di imbibizione è 0,2 °/₀.

Per gli usi, vedi i numeri precedenti.

Sezione sottile

In sezione sottile si osservano fenomeni di cataclasi, che spesso si accumulano in strisce più o meno parallele che attraversano la sezione: nelle quali il quarzo è completamente frantumato in piccoli granelli angolosi dislocati e il plagioclasio ha delle lamelle molto incurvate senza che siano rotte. Il che sembra confermare l' esistenza di un piano di traslazione diverso da (010).

I minerali riscontrati sono i seguenti:

Quarzo: presenta estinzione fortemente ondulata, ogni tanto con zone di frantumazione cataclastica (« mörtel-zonen »).

Plagioclasio: andesina con geminazioni di Albite e di Periclino, che rendono molto simile il plagioclasio ad un microclino (però l'indice di rifrazione medio subito li distingue). Tale concomitanza, dovuta alle pressioni, è localizzata nelle zone di maggior concentrazione di forze.

Biotite: pieghettata («gleitflachen») bruna.

Anfibolo: pleocroico: giallo verdognolo pallido su α, verde bluastro abbastanza carico su γ e verde carico su β. $\Delta\rho > \Delta\nu$, $\Delta_{max.} = 0{,}022$ e $2V = \hookrightarrow - 80^0$; trattasi dunque di un'orneblenda comune, che si avvicina nelle proprietà ottiche alla Soretite di Du Parc e Pearce (Bull. Soc. Min. Franc. 26, pag. 126-1903).

Muscovite poca.

Titanite di forma molto irregolare con grandi inclusi di apatite in cristalli.

Apatite parecchia.

Calcite in cristalli e venule.

Zircone tracce.

Composizione mineralogica volumetrica quantitativa

Minerale	%	
Quarzo	29,7	71,90
Plagioclasio	42,2	
Biotite	14,5	18,10
Anfibolo	9,2	
Titanite	2,5	
Epidoto	1,0	
Apatite	0,4	
Magnetite	0,1	
Calcite	0,3	
Clorite	0,1	
Totale	100,00	

5.°

COMUNE DI PALMI — **Cava Pietrosa**

Questa cava è in via di riattivazione; vi si stanno installando infatti due frantoi con trasportatore a nastro, vagli e silos per pietrisco e sabbione. Anche qui la roccia si presenta in blocchi arrotondati immersi in un materiale della stessa natura della roccia, ma profondamente alterato e disgregato. Sulla superficie dei blocchi e delle fratture, che li attraversano, si presentano macchie giallo-rossastre di ruggine, penetranti per parecchi centimetri nella màssa interna della roccia.

Nel vivo dei blocchi però la roccia è fresca e si presta bene alla lavorazione.

Il materiale è del tutto simile a quello della vicina cava, attualmente inattiva, della Ferrobeton [1]). Va notato che in qualche saggio di questa cava la roccia assume tessitura ed aspetto spiccatamente pegmatitico, come d'altronde campioni di tipo pegmatitico ed aplitico si riscontrano nel materiale da brecciame estratto dalle cave di Nicotera.

Roccia scura adoperata in genere per scogli e pietra da taglio: fu adoperata anche come le precedenti e così, p. e,, nelle Case Popolari di Palmi e nello zoccolo di circa 2 metri di altezza del fabbricato della Ditta Imbesi, sito in Reggio Calabria in via Lazio e Vittorio Veneto.

Il peso dell'unità di volume è 2,835 (media di due determinazioni).

Il potere di imbibizione è 0,070 %.

Sezione sottile

In sezione sottile è molto simile a quella di cui al numero 4; è più cataclastica e più ricca di biotite; l'epidoto forma grandi cristalli poicilitici (incl. quarzo); l'anfibolo è più raro; la calcite è localizzata in nidi; si hanno tracce di clorite; la titanite in vicinanza dell'asse ottico non si estingue, ma assume colorazioni anomali.

Composizione mineralogica volumetrica quantitativa

Quarzo	27,6	71,70
Plagioclasi	44,1	
Biotite	15,0	18,30
Anfibolo	3,4	
Titanite	1,4	
Epidoto	1,7	
Apatite	0,2	
Magnetite	0,1	
Idrossidi di Fe	0,1	
Altri min. di alter.	6,4	
Totale	100,00	

[1]) Debbo queste notizie al Dott. Ing. Paolo Calogero di Melicuccà, che qui ringrazio.

6.°

COMUNE DI SEMINARA. **Cava Janculla, tra Palmi e Bagnara**

Questa cava è in riattivazione con impianto di frantoi per la produzione di pietrisco. Anche qui la roccia si presenta in blocchi arrotondati, ingialliti in superficie, ma non disgregati.

Roccia scura adoperata per scogli, ma non per pietra da taglio perchè, mentre è molto tenace, si rompe in pezzi irregolari sotto i colpi di martello: pare siano stati fatti inutili tentativi per lavorarla.

Il peso dell' unità di volume è 2,825 (media di 2 determ.).

Il potere di imbibizione è 0,175 % (» » »).

Nell' assieme però la roccia si presenta in sezione sottile come quella della cava Pietrosa; talvolta assume anche macroscopicamente una tessitura quasi scistosa.

Composizione mineralogica volumetrica quantitativa

Minerale	%	Gruppo
Quarzo	22,0	71,5
Plagioclasi	49,5	
Biotite	22,0	18,5
Epidoto (zoisite o clinozoisite)	3,0	
Anfibolo	0,8	
Titanite	0,45	
Magnetite	0,25	
Clorite ed altri minerali di alteraz.	2,5	
Totale	100,00	

Napoli, Gabinetti di Geologia Applicata e di Arte Mineraria del R. Istituto Superiore di Ingegneria, maggio 1934 - XII.

Sulla prospettiva lineare conica di figure piane

Nota dell' ing. **M. Giovanardi**

(Adunanza del dì 9 giugno 1934 - XII)

Sunto. — In questa nota si espone un metodo semplice e relativamente rapido per determinare di una figura piana appartenente al geometrale e disegnata in una data scala la prospettiva lineare conica nella stessa scala od in una scala differente, lasciando inalterato il disegno riproducente la figura obbiettiva.

La prospettiva di un oggetto è la rappresentazione di questo sopra una superficie assegnata, generalmente piana, mediante un disegno, il quale con la maggiore precisione possibile produca nell' occhio di un osservatore, la cui posizione sia ben definita rispetto all' oggetto, quelle impressioni che gli produrrebbe l'oggetto stesso.

Osservando un oggetto, le impressioni, che noi riceviamo, sono di due specie: l' una relativa alla sua forma, l' altra relativa alla colorazione, onde la prospettiva, secondo che considera questa o quella, si distingue in *aerea* o *lineare*.

La prospettiva lineare o geometrica, della quale appunto noi ci occupiamo, ha lo scopo di rappresentare gli elementi geometrici che costituiscono l' oggetto in esame. La sensazione visiva, che noi proviamo nell' osservare un oggetto con un occhio solo, è prodotta dall' insieme degli infiniti raggi luminosi emananti dai punti dell'oggetto e che colpiscono il centro ottico del nostro occhio — *centro di vista* o *punto di vista* —. Interponendo fra noi e l'oggetto una superficie opaca, essa ci impedirà la visione dell' oggetto, ma, se su questa immaginassimo determinate le tracce degli anzidetti raggi luminosi, otterremmo una figura tale che le congiungenti i suoi punti col centro di vista coinciderebbero con gli stessi raggi primitivi. Avremo così, nell' osservare questa figura, la sensazione visiva relativamente approssimata dell' oggetto, pur essendo questo nascosto dalla superficie opaca.

Denominiamo perciò *prospettiva lineare conica* dell' oggetto tale figura, la quale può anche definirsi la proiezione centrale o conica di esso col centro di proiezione in uno degli occhi dell' osservatore. I raggi proiettanti, che denominiamo *raggi visuali*, coincidono coi raggi luminosi anzidetti, ma hanno senso contrario ad essi.

Risulta pertanto evidente che a perfetto rigore occorrerebbe ese-

guire due disegni prospettici dell'oggetto in esame, considerando due centri di vista distinti relativi agli occhi dell'osservatore e vederli separatamente e contemporaneamente, come si verifica appunto nello stereoscopio. Ma, siccome i due disegni differirebbero di poco tra loro data la breve distanza che intercede tra i due occhi, uno di essi si ritiene sufficiente in pratica per darci una concezione relativamente esatta dell'oggetto rappresentato.

Nella prospettiva lineare conica sono quindi elementi fondamentali: il centro di vista — uno degli occhi dell'osservatore — e la superficie su cui devesi rappresentare la prospettiva dell'oggetto considerato; questa è per noi generalmente piana e verticale e costituisce il piano di rappresentazione o *quadro* o foglio di disegno. Il piano, su cui si immagina collocato l'oggetto da rappresentare, è orizzontale e viene denominato comunemente: *geometrale* o *piano stazione* o *piano di terra*. Il quadro, in generale normale al geometrale e sempre normale al *raggio visuale principale*, — raggio generalmente orizzontale che, partendo dal centro di vista dell'osservatore, colpisce un determinato punto appartenente o non all'oggetto da rappresentare, e nella cui direzione si immagina che l'osservatore stesso tenga lo sguardo fisso —, viene disposto tra il centro di vista e l'oggetto. Il punto P d'incontro del raggio visuale principale col quadro rappresenta il cosiddetto *punto principale*; il cerchio con centro in P e raggio eguale alla distanza tra il centro di vista ed il quadro, descritto nel quadro stesso, viene denominato *cerchio di distanza*.

È di notevole importanza la scelta del centro di vista per ottenere una prospettiva che soddisfi, come suol dirsi, l'occhio dell'osservatore; è opportuno quindi che l'oggetto osservato sia interamente contenuto in un cono di rotazione col vertice nel centro di vista, al cui asse, coincidente col raggio visuale principale, le generatrici siano inclinate di un angolo compreso tra 18° e 22°. Tale cono viene denominato *cono visivo*. Superandosi l'angolo di 22°, i punti dell'oggetto, le cui prospettive uscissero fuori del *cerchio visivo*, traccia sul quadro di detto cono visivo, sarebbero osservati con fatica da un occhio rivolto nella direzione del raggio visuale principale, dando luogo così ad una prospettiva deformata dell'oggetto medesimo. Per evitare ciò è necessario che le distanze tra il centro di vista ed i piani condotti pei singoli punti visti dell'oggetto normalmente al raggio visuale principale, e perciò parallelamente al quadro, non siano inferiori a due volte e mezza quelle intercedenti tra i detti punti ed il raggio visuale principale stesso. In questo caso limite infatti la tangente dell'angolo formato dal raggio visuale passante pel punto considerato col raggio visuale principale risulterà eguale a $\frac{2}{5}$, cor-

rispondente appunto ad un angolo di 22° circa. È evidente che in tal caso la lunghezza del raggio del cerchio di distanza risulterà due volte e mezza quella del raggio del cerchio visivo. Ne nasce ancora come conseguenza che la distanza del centro di vista dall'oggetto da rappresentare dovrà essere tanto maggiore quanto maggiori sono le dimensioni dell'oggetto medesimo.

Lasciando da parte le svariate considerazioni da farsi per la determinazione di una buona prospettiva e che si trovano ampiamente svolte in pregevoli trattati, [1]) limitandoci a quelle fondamentali sin qui riassunte e più che sufficienti per lo scopo cui mira questa nota, ci proponiamo ora di esporre un metodo semplice onde determinare di una figura piana, appartenente al geometrale e disegnata in una data scala, la prospettiva lineare conica in una scala differente dalla prima.

Spesso nella esecuzione del disegno di prospettiva di un oggetto, di cui si conosce in una scala assegnata la *pianta* — figura appartenente al geometrale — per le notevoli dimensioni dello stesso, tenendo presenti le ragioni anzidette, occorre allontanare il centro di vista dall'oggetto medesimo, e, pur avvicinando il più possibile il quadro ad esso, la prospettiva eseguita nella stessa scala risulterebbe di dimensioni relativamente piccole e tali quindi da non porre in evidenza le singole parti dell'oggetto rappresentato.

Al noto metodo di Desargues ed a quello dei punti di distanza ridotta crediamo pertanto opportuno aggiungerne un altro che, pur permettendo come i precedenti di eseguire le prospettive delle piante degli oggetti in una scala più grande, lasciando inalterati i disegni riproducenti le piante stesse, offre nelle costruzioni grafiche delle semplificazioni, che potrebbero riuscire di una certa utilità pratica.

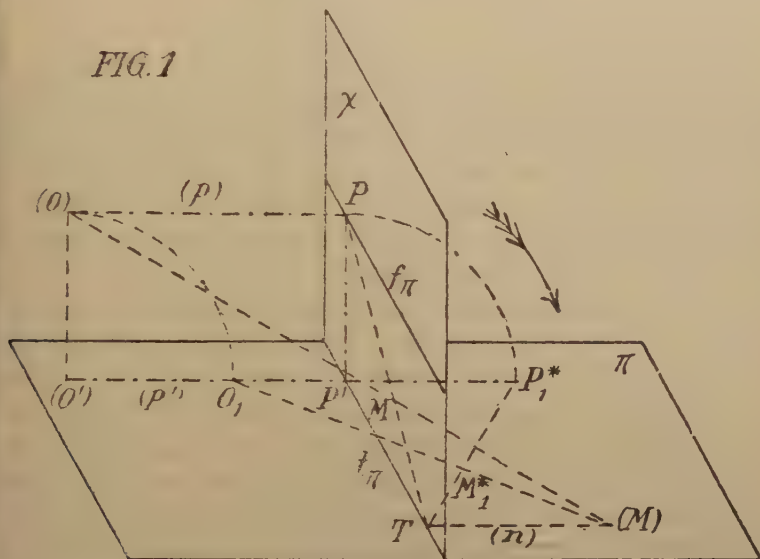
Sia χ il quadro — foglio di disegno — (Fig. 1) e (O) il punto di vista [2]), determinato rispetto ad esso dal punto principale P, piede della perpendicolare condotta da (O) a χ, e dal cerchio di distanza con

---

[1]) Bompiani E. — *Applicazioni di Geometria Descrittiva*, (Dispense litografate - Roma 1932-33); Fano G. — *Lezioni di Geometria Descrittiva*, (Ed. Paravia - Torino 1925).

[2]) Si sono indicati: con lettere maiuscole i punti, con lettere minuscole le rette, e propriamente tali elementi nello spazio con le stesse lettere chiuse in parentesi e con o senza apici; le loro immagini o prospettive con le stesse lettere senza parentesi e con o senza apici; gli elementi dei piani ribaltati con lettere affette da indici numerici inferiormente a destra, mentre i ribaltamenti delle immagini con lettere affette da indici numerici inferiormente e da asterischi in alto a destra. Gli elementi di fuga sono indicati con le lettere F, f, secondo che si tratta di punto o di retta.

ntro in P e raggio la distanza di (O) dal quadro. Consideriamo un ano π normale a χ, che assumiamo come geometrale, e secante χ lla retta t_π — *traccia* del piano π su χ. Di un punto (M) del piano la prospettiva M è nell'intersezione col quadro del raggio visuale ndotto per esso. Per determinarla quindi, condurremo per (M) la rmale (n) al quadro, la cui prospettiva sarà definita dalla congiun-

gente il punto T — *traccia* di (n) sul quadro — col punto P — *punto di fuga* di tutte le rette normali al quadro —, nell'incontro di (OM) con PT si avrà il punto M, prospettiva di (M).

Dai triangoli simili $(O)\ MP$ e $(M)\ MT$ risulta:

$$\frac{MP}{MT} = \frac{(O)\,P}{(M)\,T}$$

Il punto M quindi divide il segmento finito PT, prospettiva del segmento infinito della retta (n) compreso nella regione posteriore [1] tra il quadro e il piano all'infinito in parti proporzionali rispettivamente alle distanze dei punti *(O)* e *(M)* dal quadro. Ribaltando il piano χ su π intorno alla t_π nel senso indicato dalla freccia, il punto P verrà in P_1^* descrivendo nel piano principale di profilo di traccia (p') sul piano π un quarto di circonferenza con centro nel

[1]) Si denomina regione anteriore, rispetto al quadro, quella in cui è collocato l'operatore; piano anteriore è quello condotto pel centro di vista dell' osservatore e parallelo al quadro.

punto P', proiezione ortogonale di P su π, e di raggio la distanza del centro di vista *(O)* dal piano di terra π. Il segmento PT appartenente al piano χ, si ribalterà in $P_1{}^* T = PT$ ed il punto M, prospettiva del punto *(M)*, in $M_1{}^*$ sulla $P_1{}^*T$ in modo che risulti:

$$\frac{P_1{}^*M_1{}^*}{M_1{}^*T} = \frac{PM}{MT} = \frac{(O)P}{(M)T}$$

Determinato quindi $P_1{}^*$, staccando sulla $P_1{}^*P'$ nel senso verso la regione anteriore un segmento $P_1{}^*O_1 = (O)P$, nell' incontro della retta $O_1(M)$ con la $P_1{}^* T$ si avrà il punto $M_1{}^*$, ribaltamento del punto M del quadro, che a sua volta è la prospettiva del punto *(M)*. Ne risulta così una relazione omologica tra la figura obbiettiva dei punti *(M)* e quella dei punti $M_1{}^*$, essendo centro di omologia il punto O_1, posizione ribaltata del punto *(O)* come punto del piano anteriore, asse t_π, traccia di π su χ, e rette corrispondenti $(M)T$ e $P_1{}^* T$.

Assegnata pertanto in una data scala la pianta *(ABCDEFGH)* di un oggetto collocato nella regione posteriore (Fig. 2) sul piano di terra π anzidetto, disegnato del raggio visuale principale orizzontale (p) la proiezione (p'), che rappresenta anche la traccia su π del piano principale di profilo, sulla quale trovasi la proiezione quotata $(O')_q$ del punto di vista *(O)*, convenientemente scelto, segneremo normalmente alla (p') e tra il punto $(O')_q$ e la pianta anzidetta la traccia t del quadro χ sul piano di terra π. La distanza di $(O')_q$ da t indica la distanza del centro di vista dal quadro. Denotando con P' il punto d' incontro della t con la (p'), e staccando su quest' ultima, a partire rispettivamente dai punti $(O')_q$ e P' nel senso verso la regione posteriore, due segmenti eguali a quello che rappresenta graficamente nella scala del disegno la quota (q) del punto *(O)* rispetto a π, si otterranno negli estremi di detti, differenti da $(O')_q$ e P', i punti O_1 e $P_1{}^*$. Mentre P' rappresenta la proiezione ortogonale su π del punto principale P, il punto $P_1{}^*$ indica invece il ribaltamento di P, punto del quadro χ, su π. Tali operazioni preliminari vengono tutte eseguite sul foglio di disegno, che per noi rappresenta il piano di terra o geometrale. Conducendo da un punto *(A)* della figura *(ABCDEFGH)* la normale $(A)T$ alla retta t e congiungendo i punti T e (A) rispettivamente con $P_1{}^*$ e O_1, determinati come precedentemente si è detto, nell' incontro della $TP_1{}^*$ con $(A)O_1$ si avrà il punto $A_1{}^*$, ribaltamento del punto A come punto del quadro, che a sua volta rappresenta la prospettiva del punto obbiettivo (A).

Immaginando il piano χ prima ribaltato su π intorno alla t, come innanzi si è detto, e poi rialzato portando seco la retta $P_1{}^*T$, alla

uale appartiene il punto A_1^*, questo verrà a trovarsi in A sulla retta PT e ad una distanza da P eguale a $P_1^*A_1^*$.

Quindi se sullo stesso foglio di disegno, che ora immaginiamo rappresentare il quadro, (Fig. 3) tracciassimo due rette f_π, t_π parallele fra loro ed alla retta t e distanti di un segmento eguale a PP', che, misurato nella scala del disegno, indica la quota del punto (O) rispetto a π, nell'incontro della $P_1^*O_1$ con la f_π si avrà il punto P — punto principale —, conducendo da P la parallela alla PT_1^* e proiettando su questa normalmente a t il punto A_1^* in A, si otterrà la prospettiva richiesta del punto (A). Le rette f_π, t_π rappresentano rispettivamente la retta di fuga e la traccia del piano π, i punti

D e $-D$, sulla f_π, simmetrici rispetto a P e distanti da esso di un segmento eguale a $(O')_q\, P'$, indicano i punti di distanza a destra ed a sinistra dell' osservatore. La larghezza della striscia compresa fra f_π e t_π denota la distanza del centro di vista dal piano di terra.

Avvalendoci così dell'omologia anzidetta, per quanto occorra, e di costruzioni più semplici ed immediate, che nascono gradualmente per le particolari posizioni di punti e rette della figura obbiettiva, eseguiremo la prospettiva di questa nella stessa scala. Volendola eseguire in un'altra scala, supponiamo tripla di quella in cui è disegnata la figura obbiettiva, è evidente che varierà nello stesso rapporto la larghezza della striscia fra f_π e t_π (Fig. 4). I punti $\frac{D}{3}$ e $-\frac{D}{3}$ sulla f_π, equidistanti da P di un segmento eguale a $(O')_q\, P'$, indicano ora i punti di distanza ridotta di $\frac{2}{3}$.

Conducendo quindi alla $P_1{}^*A_1{}^*$ da P la parallela, occorrerà staccare su questa a partire da P e nel senso verso t_π un segmento triplo di quello indicato con $P_1{}^*A_1{}^*$, per ottenere così nel punto A la prospettiva richiesta di un punto (A) della pianta. Nella Fig. 3 e nella Fig. 4 si vedono eseguite appunto rispettivamente le costruzioni inerenti alla determinazione della prospettiva della figura $(ABCDEFGH)$ del geometrale assegnata in una data scala, considerando nella prima la prospettiva nella stessa scala della figura obbiettiva e nella seconda in una scala tripla [1]).

Quanto abbiamo detto per l' ingrandimento delle prospettive di figure piane del geometrale è applicabile anche per la riduzione di dette; ma in tal caso riesce più opportuno avvicinare il quadro al centro di vista.

Nel caso in cui non vi fosse l' opportunità di avere la pianta dell' oggetto da rappresentare nello stesso foglio di disegno occorrente per la prospettiva, ma separatamente, le costruzioni anzidette per la determinazione della prospettiva richiederebbero maggior tempo per l' esecuzione, ma riuscirebbero anche semplici ed evidenti.

---

[1]) Mentre nella Fig. 1 il foglio di disegno rappresenta il piano di terra, piano orizzontale, nelle Fig. 2, 3, 4 rappresenta invece il quadro, piano verticale.

Le algebre nei corpi finiti dotate di modulo e commutative

Nota del socio ordinario **G. Scorza**

(Adunanza del dì 9 Giugno 1934-XII)

Sunto. — Oggetto di questa Nota è mostrare quali ausili possano trarsi dalla teoria generale delle algebre per lo studio dei campi d'integrità finiti.

La lettura delle due elaborate Memorie del Mignosi [1]) sui campi di integrità finiti mi ha dato occasione recentemente di rilevare che delle sue ricerche quelle riferentisi ai campi contenenti dei corpi numerici possono ricever luce dalla applicazione metodica della teoria generale delle algebre [2]).

Poichè i risultati che così si incontrano non sembrano privi di interesse e completano in qualche punto quelli del Mignosi, non credo inutile il fissarli in questa breva Nota.

1. Sia A un'algebra commutativa d'ordine n, in un corpo finito Γ, col modulo u e quindi certo non pseudonulla.

Essa o è priva di elementi eccezionali, indi semi-semplice, o possiede una sotto-algebra eccezionale (propria) E; e in tale ultimo caso l'algebra A-E, complementare di E rispetto ad A, è semi-semplice ($C.N.A.$ pag. 254, n. 148).

Esaminiamo separatamente le due alternative.

2. Se A è semi-semplice essa o è addirittura semplice, o è una somma diretta di algebre semplici; e se è semplice è il prodotto diretto di due sue sotto-algebre, aventi lo stesso suo modulo, delle quali una è primitiva, l'altra regolare ($C.N.A$, pag. 332, n. 230). Intanto un'algebra regolare di ordine >1 non è certo commutativa, dunque, attesa la commutatività di A, A non può esser semplice, se non a patto d'essere addirittura primitiva.

---

[1]) G. Mignosi, *I campi d'integrità finiti di 1ª specie contenenti un corpo* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. LVI, 1932); e *Sui campi d'integrità di specie qualunque e su quelli di 2ª specie contenenti un corpo* (Ibid. t. LVII, 1933).

[2]) Nel seguito per quanto occorre ricordare della teoria in discorso rinvio, con la sigla $C.N.A.$, al mio trattato: *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921).

Ma allora A, se è semplice, può considerarsi come un corpo numerico isomorfo al corpo algebrico $[\Gamma, f(\xi)]$ derivato da Γ mediante un polinomio ivi irriducibile $f(\xi)$ di grado n (cfr. *C. N. A.*, pag. 454) e, se y è un elemento di A di rango n (per es. quello corrispondente all'elemento ξ di $[\Gamma, f(\xi)]$ in una corrispondenza di isomorfismo), gli elementi di A sono dati tutti, e ciascuno una volta sola, dall'espressione

$$1) \qquad \lambda_0 y^{n-1} + \lambda_1 y^{n-2} + \ldots + \lambda_{n-2} y + \lambda_{n-1} u$$

al variare delle λ fra i numeri di Γ.

Se invece A è somma diretta di t (>1) algebre semplici (indi primitive) $A_1, A_2, .., A_t$ degli ordini $n_1, n_2, \ldots, n_t$ $(n_1 + n_2 + \ldots + n_t = n)$, con i moduli (mutuamenti nullifici) $u_1, u_2, \ldots, u_t$, sarà

$$2) \qquad u = u_1 + u_2 + \ldots + u_t,$$

per ciascun elemento x di A sussisterà un'eguaglianza ed una sola del tipo

$$3) \qquad x = x_1 + x_2 + \ldots + x_t,$$

con x_i in A_i, e ciascuna delle algebre A_i avrà una struttura simile a quella indicata per A nell'ipotesi precedente.

Avvertasi che, poichè le algebre A_i sono primitive, indi prive di divisori dello zero *l'elemento di x di A dato dalla* 3) *riesce un divisore dello zero quando, e solo quando, gli elementi $x_1, x_2, \ldots, x_t$ non sono tutti nulli, ma è nullo almeno uno di essi* (*C. N. A.*, pag. 244).

3. Supponiamo ora che A possegga la sotto-algebra eccezionale E e indichiamo con $[x]$ la classe mod E individuata da un elemento di A che sia stato indicato con x, di guisa che, se x percorre A, $[x]$ descriverà A-E.

L'algebra A-E e semi-semplice e dotata del modulo $[u]$, dunque o è semplice, e allora, per quanto è detto nel n. prec., è addirittura primitiva, o è somma diretta di algebre primitive.

4. Si dia la prima alternativa e sia ν l'ordine di A-E (cioè, n-ν l'ordine di E).

Allora, se $[y]$ è un elemento di A-E di rango ν gli elementi di A-E sono dati tutti e ciascuno una volta sola dall'espressione

$$4) \qquad [x] = \lambda_0 [y]^{\nu-1} + \lambda_1 [y]^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{\nu-2} [y] + \lambda_{\nu-1} [u]$$

al variare delle λ in Γ, e quindi gli elementi di A sono dati tutti, e ciascuno una volta sola, dall'espressione

$$5) \qquad x = \lambda_0 y^{\nu-1} + \lambda_1 y^{\nu-2} + \ldots + \lambda_{\nu-2} y + \lambda_{\nu-1} u + e,$$

l variare delle λ in Γ e di e in E.

Si indichi con $\Phi(\xi)=0$ l'equazione minima di x in A e con $\varphi(\xi)=0$ quella di $[x]$ in A-E. Per un teorema noto ($C.N.A$, pag. 377 n. 270) $\Phi(\xi)$ sarà divisibile per $\varphi(\xi)$ e le potenze di $\varphi(\xi)$ con esponenti abbastanza elevati saranno divisibili per $\Phi(\xi)$; d'altronde essendo A-E primitiva, $\varphi(\xi)$ è, in Γ, irriducibile ($C.N.A.$, pag. 326, n. 222) dunque $\Phi(\xi)$ è una potenza di $\varphi(\xi)$, poniamo $\Phi(\xi) = [\varphi(\xi)]^\tau$.

Ora x riesce privo di inverso, cioè nullo o divisore dello zero, se, e soltanto se, $\Phi(\xi)$ è divisibile per ξ ($C.N.A.$, pag. 228 n. 124 in fine) dunque ciò accade, se, e soltanto se, è $\varphi(\xi)=\xi$, ossia $[x]=[0]$, o, in altri termini, se x sta in E.

Si deduce che:

Nell'ipotesi attuale i divisori dello zero di A sono tutti, e solo, gli elementi non nulli di E.

A proposito dell'esponente τ della potenza di $\varphi(\xi)$ eguale a $\Phi(\xi)$ non è forse inutile osservare che:

Se μ è il grado di $\varphi(\xi)$, è $\tau \leq \dfrac{n-\nu}{\mu} + 1.$

Essendo μ il grado di $\varphi(\xi)$, e $\mu\tau$ quello di $\Phi(\xi)$: ciò significa che i $\mu\tau$ elementi di A

$$6) \qquad u, x, x^2, \ldots, x^{\mu\tau-1}$$

sono indipendenti: e dunque, supposto $\tau > 1$ — chè, altrimenti, la diseguaglianza da dimostrare sarebbe evidente —, sono tali anche gli elementi

$$7) \qquad \varphi(x),\ x\varphi(x),\ x^2\varphi(x),\ \ldots,\ x^{\mu(\tau-1)-1}\varphi(x).$$

Ma, essendo

$$\varphi([x]) = [\varphi(x)] = [0],$$

$\varphi(x)$, indi, attesa l'eccezionalità di E, ogni altro elemento della serie 7), appartiene ad E, dunque i $\mu(\tau-1)$ elementi 7) sono altrettanti elementi indipendenti di E. Ma l'ordine di E è $n-\nu$, per conseguenza si ha $\mu(\tau-1) \leq n-\nu$; cioè, come volevasi,

$$8) \qquad \tau \leq \frac{n-\nu}{\mu} + 1.$$

Quanto alla struttura dell'algebra (pseudonulla) E nel caso che qui si esamina, vi è da osservare che:

Se $\nu > 1$ e l'indice di E è r, l'ordine di E^{r-1} è necessariamente > 1.

Si supponga che E^{r-1} sia del 1° ordine e sia $e' \pm 0$ un elemento di E^{r-1}, sicchè ogni altro sarà il prodotto scalare di e' per un numero di Γ.

Ora sia

$$9) \qquad \psi(\xi) = \xi^{\nu} + \alpha_1 \xi^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} \xi + \alpha_{\nu} = 0$$

l'equazione minima di $[y]$ in A-E. Sarà

$$10) \qquad y^{\nu} + \alpha_1 y^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} y + \alpha_{\nu} u = e'',$$

con e'' elemento conveniente di E.

Intanto da $ye' = \gamma e'$, con γ in Γ, si trae successivamente,

$$11) \quad y^2 e' = y \cdot \gamma e' = \gamma \cdot y e' = \gamma^2 e' \ , \ y^3 e' = \gamma^3 e', \ldots, y^{\nu} e' = \gamma^{\nu} e',$$

quindi moltiplicando la 10), membro a membro, per e', badando che $e'e''$, come elemento di E^r, è nullo e tenendo conto delle 11) si ha

$$(\gamma^{\nu} + \alpha_1 \gamma^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} \gamma + \alpha_{\nu}) e' = 0.$$

Ma $e' \pm 0$; dunque è

$$\gamma^{\nu} + \alpha_1 \gamma^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} \gamma + \alpha_{\nu} = 0$$

e la 9) ammette la radice γ. Ma la 9) è irriducibile in Γ, dunque è $\nu = 1$; cioè, se l'ordine di E^{r-1} è 1, è necessariamente $\nu = 1$. Da ciò il teorema.

Si supponga orà $\nu > 1$ e si indichino con $n_2, \ldots, n_{r-1}$, gli ordini di $E^2, E^3, \ldots, E^{r-1}$.

Essendo $E > E^2 > E^3 > \ldots > E^{r-1}$ sarà

$$n - \nu \geq n_2 + 1 \ , \ n_2 \geq n_3 + 1, \ldots, n_{r-2} \geq n_{r-1} + 1 \ , \ n_{r-1} \geq 2,$$

ossia $n - \nu \geq r$; dunque:

Se $\nu > 1$, per l'indice r di E si ha $r \leq n - \nu$.

Come è noto, un'algebra pseudonulla potenziale di ordine $n - \nu$ ha per indice $n - \nu + 1$ (*C. N. A.*, pag. 322, n. 218), dunque:

Se $\nu > 1$, l'algebra E non è certo potenziale.

La (8), per $\mu = \nu$, dà $\tau \leq \frac{n}{2}$; quindi, se fosse $\nu > \frac{n}{2}$ sarebbe neces-

riamente $\tau = 1$, l'equazione minima di y in A coinciderebbe con ella di $[y]$ in $A-E$, cioè nella (10) sarebbe $e''=0$, e lo stesso avrebbe per ogni altro elemento di A appartenente alla classe $[y]$.

Ora ciò è assurdo. Infatti si indichi con e_1 un elemento non nullo E^{r-1}, nella classe $]y]$ si consideri l'elemento $y+e_1$, e si supponga, è possibile, che sia nel tempo stesso

$$\psi(y)=0 \qquad \text{e} \qquad \psi(y+e_1)=0.$$

Poichè e_1 è in E^{r-1} sono nulle tutte le potenze di e_1 con esponenti >1, quindi è, per ogni intero $k>1$,

$$(y+e_1)^k = y^k + ky^{k-1}e_1,$$

, indicata con $\psi'(\xi)$ la derivata di $\psi(\xi)$, si ha

$$0=\psi(y+e_1)=\psi(y)+\psi'(y)e_1=\psi'(y)e_1 .$$

Ora la derivata $\psi'(\xi)$, attesa l'irriducibilità di $\psi(\xi)$, non è certo ulla (*C. N. A.*, pp. 162-163); d'altronde il grado di $\psi'(\xi)$ è inferiore quello di $\psi(\xi)$, dunque $\psi'(y)\neq 0$. Intanto la sotto-algebra potenziale i A generata da y, per l'ipotesi che l'equazione minima di y in A ia $\psi(\xi)=0$, è primitiva; dunque $\psi'(y)$ non è neppure un divisore dello ero, e da $\psi'(y)e_1=0$ segue $e_1=0$. Ciò contrasta con l'ipotesi fatta u e_1, dunque è certo $\nu\leq\frac{n}{2}$, ossia:

L'ordine di E è non inferiore ad $\frac{n}{2}$ [3]).

5. Supponiamo ora che A-E sia somma diretta di s algebre rimitive

$$(A-E)_1\,,\ (A-E)_2\,,\ldots,\ (A-E)_s\,,$$

egli ordini $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$, di guisa che l'ordine di E sarà $n-\nu_1-\nu_2-\ldots-\nu_s$.

Se il modulo di $(A$-$E)_i$ si indica con $[v_i]$, è lecito supporre, in rimo luogo, che v_i sia un automodulo di A (*C.N.A.*, pag. 283), e n secondo luogo che sia

$$u=v_1+v_2+\ldots+v_s\,, \tag{12}$$

[3]) Come mostrerò in una Nota successiva, che uscirà nei Rendiconti ei Lincei, alle algebre nei corpi finiti può essere esteso un teorema dello Wedderburn da lui dimostrato per le algebre nei corpi a sottocorpo fonamentale isomorfo al corpo razionale: allora le osservazioni di questo n.° poranno essere assai meglio precisate.

con $v_1, v_1, \ldots, v_s$ mutuamente nullifici (cfr. *C. N. A.*, pag. 373 n. 277).

Se $[x]$ è un qualsiasi elemento di A-E, per $[x]$ sussiste un' eguaglianza, ed una sola del tipo

$$13) \qquad [x] = [x_1] + [x_2] + \cdots + [x_s] ,$$

con $[x_i]$ in $(A\text{-}E)_i$; d'altronde, indicando con $[y_i]$ un conveniente elemento di $(A\text{-}E)_i$, per $[x_i]$ sussiste un'eguaglianza ed una sola del tipo

$$[x_i] = \lambda_0^{(i)} [y_i]^{\nu_i - 1} + \lambda_1^{(i)} [y_i]^{\nu_i - 2} + \ldots + \lambda^{(i)}_{\nu_i - 1} [v_i] ,$$

con le $\lambda_j^{(i)}$ numeri di Γ, dunque:

Se x è un elemento qualsiasi di A, per x sussiste un' eguaglianza ed una sola del tipo

$$14) \qquad x = \sum_i^{1 \ldots s} (\lambda_0^{(i)} y_i^{\nu_i - 1} + \lambda_1^{(i)} y_i^{\nu_i - 2} + \ldots + \lambda^{(i)}_{\nu_i - 1} v_i) + e,$$

con le λ numeri di Γ ed e elemento di E.

Giacchè l'algebra $(A\text{-}E)_i$ è primitiva, l'equazione minima $\varphi_i(\xi) = 0$ di $[x_i]$ in $(A\text{-}E)_i$ è irriducibile. Intanto, se l'equazione minima di $[x]$ in A-E è $\varphi(\xi) = 0$, $\varphi(\xi)$ è il minimo comune multiplo dei polinomi $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi), \ldots, \varphi_s(\xi)$ (*C. N. A.*, pag. 243), dunque $\varphi(\xi)$ è il prodotto di quanti fra questi polinomi riescono distinti. Segue, per il teorema più sopra ricordato, che, se $\Phi(\xi) = 0$ è l'equazione minima di x in A $\Phi(\xi)$ è un prodotto di potenze dei polinomi $\varphi_i(\xi)$ fra di loro diversi,

Intanto x è privo di inverso, se, e solo se, $\Phi(\xi)$ è divisibile per ξ. indi almeno uno dei polinomi $\varphi_i(\xi)$ eguale a ξ, cioè almeno uno degli elementi $[x_i]$ eguale a $[0]$, dunque:

Supposto che l' elemento x definito dalla 14) *non sia nullo, che cioè nella* 14) *non siano nulli tutti i coefficienti λ e nullo e, esso riesce un divisore dello zero, se, e soltanto se, almeno per un valore di i sono nulle tutte le $\lambda^{(i)}$.*

6. Dire che A è un' algebra in un corpo finito, commutativa e dotata di modulo, è quanto dire, con la terminologia del Mignosi, che A è un campo di integrità finito contenente un corpo numerico, per il quale un elemento di A riesce periodico, pseudonullo o pseudoperiodico, secondo che è dotato di inverso, oppure è (pseudonullo, indi, attesa la commutatività di A [*C. N. A.*, pag. 236, n° 133]) eccezionale, o, infine, è un divisore dello zero, ma non è eccezionale.

Ma allora codesto campo, se non è addirittura un corpo numerico è di 2ª specie ed incompleto, se A è semi-semplice, ma non semplice;

i 1ª specie e proprio, se A non è semi-semplice, ed A-E è semplice;
i 2ª specie e completo, se A-E è semi-semplice, ma non semplice,

Il numero degli elementi non nulli di A è in ogni caso $p^{mn}-1$. *e* p^m *(con p numero primo) è quello degli elementi di* Γ; *poi, codesti elementi,* per quanto via via è stato osservato:

Se A è un campo di 2ª specie incompleto e per A si mantengono le ipotesi e le notazioni del n. 2, si ripartiscono in

$$\prod_i^{1..t}(p^{mn_i}-1)$$

elementi periodici e

$$p^{mn}-1-\prod_i^{1..t}(p^{mn_i}-1)$$

elementi pseudoperiodici;

Se A è un campo di 1ª specie e per esso si mantengono le ipotesi e le notazioni del n. 4, si ripartiscono in $p^{m(n-\nu)}-1$ *elementi pseudonulli, e* $p^{mn}-p^{m(n-\nu)}$ *elementi periodici;*

Se infine A è un campo di 2ª specie completo e per esso sussistono le ipotesi e notazioni del n. 5, si ripartiscono in

$$p^{m(n-\nu_1-\ldots\nu_s)}\prod_i^{1..t}(p^{m\nu_i}-1)$$

elementi periodici, in

$$p^{m(\nu_1-\ldots-\nu_s)}-1$$

elementi pseudonulli, e

$$p^{mn}-p^{m(\nu_1-\ldots-\nu_s)}\left\{\prod_i^{1..s}(p^{m\nu_i}-1)+1\right\}$$

elementi pseudoperiodici.

Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici

Nota del socio ordinario **G. Scorza**

(Adunanza del dì 16 giugno 1934 - XII)

Sunto. — Con quanto segue si dà una nuova dimostrazione di un teorema stabilito dal Dott. S. Amante.

Con due Note, portanti il medesimo titolo di questa e pubblicate nei fascicoli dell' 8 gennaio e 5 marzo 1933 dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, il dott. Salvatore Amante ha risoluto il problema della caratterizzazione delle matrici a forma canonica equivalenti a matrici (nel corpo complesso) del tipo

$$x = \left\| \begin{matrix} a_1 , & a_2 , & a_3 , & \ldots & a_{n-1} , & a_n \\ 0 , & a_1 , & a_2 , & \ldots & a_{n-2} , & a_{n-1} \\ 0 , & 0 , & a_1 , & \ldots & a_{n-3} , & a_{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 , & 0 , & 0 , & \ldots & 0 , & a_1 \end{matrix} \right\|$$

Il metodo che egli segue porta a considerazioni, per quanto di natura elementare, discretamente faticose: non mi sembra pertanto del tutto inutile mostrare come ai suoi risultati si possa pervenire per via agevole e piana quando si tenga conto della teoria generale della riduzione a forma canonica delle matrici ad elementi complessi.

1. Si indichi con $c_{r,s}$ la matrice quadrata d'ordine n per la quale l'elemento di posto (r,s) è 1 e tutti gli altri sono nulli; indi si ponga

$$I_k = \sum_i^{1 \ldots n-k+1} c_{i,\, i+k-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

di guisa che I_1 sarà la matrice identica di ordine n e per la matrice x si avrà

$$x = a_1 I_1 + a_2 I_2 + \ldots + a_n I_n .$$

Le radici caratteristiche di x sono tutte eguali ad a_1; per conguenza la matrice canonica ad essa equivalente si troverà determinando la *segnatura* [1]) della matrice (pseudonulla o nulla):

$$y = a_2 I_2 + \ldots + a_n I_n .$$

---

[1]) Per questa nozione e per quanto segue veggasi G. Scorza, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921) pag. 421 e seg.ti.

Scartato il caso privo di interesse in cui è $y = 0$, supponiamo che le $a_2, \ldots, a_n$ non siano tutte nulle; e fra esse sia a_{h+1} la prima non nulla, di guisa che potrà scriversi

$$y = a_{h+1} I_{h+1} + \ldots + a_n I_n .$$

Da

$$I_k = \sum_i^{1..n-k+1} c_{i,i+k-1} \quad , \quad I_{k'} = \sum_j^{1..n-k'+1} c_{j,j+k'-1}$$

badando che

$$c_{i,j}\, c_{r,s} = \begin{cases} 0 \; , & se\, j \neq r \\ c_{i,s} , & se\, j = r , \end{cases}$$

si trae

$$I_k I_{k'} = \sum_i^{1..n-k+1} \sum_j^{1..n-k'+1} c_{i,i+k-1}\, c_{j,j+k'-1} = \sum_i^{1..n-k-k'+2} c_{i,i+k+k'-2} = I_{k+k'-1} ,$$

se $k + k' - 1 \leq n$, e

$$I_k I_{k'} = 0$$

se $k + k' - 1 > n$.

Ciò porta che le $I_1, \ldots, I_n$ sono a due a due permutabili, e che:

(1) $$y^2 = a^2_{h+1} I_{2h+1} + \ldots ,$$

(2) $$y^3 = a^3_{h+1} I_{3h+1} + \ldots ,$$

e, in generale, per $sh + 1 \leq n$

(3) $$y^s = a^s_{h+1} I_{sh+1} + \ldots ,$$

dove nei secondi membri delle (1), (2), (3) si è indicato soltanto il termine che interessa, cioè quello che contiene la I_k con indice minimo.

Indicati con q ed r il quoziente e il resto della divisione di $n-1$ per h, si avrà dunque

$$y^s = a^s_{h+1} I_{sh+1} + \ldots \qquad \text{per } s = 1, 2, \ldots, q$$
$$y^{q+1} = 0$$

Le caratteristiche delle matrici

$$y , y^2 , \ldots , y^q , y^{q+1}$$

sono

$$n - h, n - 2h, \dots n - qh, 0,$$

quindi le loro nullità sono

$$h, 2h, \dots qh, n$$

e la segnatura di y è

$$(h, h, \dots, h, r + 1)$$

dove il numero dei termini eguali ad h è q.

Segue che la matrice canonica equivalente ad x, con la terminologia del Cipolla adottata dal dott. Amante, ha $r + 1$ catene di ordine q ed $h - r - 1$ catene di ordine $q - 1$.

In ciò consiste il teorema enunciato dal dott. Amante, teorema che, naturalmente, è invertibile.

Il bradisismo di Paestum

Nota del socio ordinario **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 16 giugno 1934 - XII)

Sunto. — In base all' esame dei materiali che costituiscono la piattaforma rocciosa di Paestum e di quelli che, trasportati più tardi dalle acque, si sovrapposero ai precedenti invadendo gran parte della città, colmandone le strade e le case, addossandosi alle mura e modificando il clima e la vegetazione, si deduce l' importanza che hanno avuto e che hanno, nel territorio, le oscillazioni positive e negative della linea di spiaggia, cioè i bradisismi, corrispondenti a quelli che si verificano in altre zone della costa tirrena (agro Pontino, golfo di Napoli, isola di Capri ecc.).

Per invito dell'Ente per le antichità ed i monumenti della provincia di Salerno ho recentemente preparato un lavoro, destinato a contribuire, con osservazioni geologiche, alla conoscenza delle cause che determinarono la scomparsa quasi totale dell' antica città di Paestum.

Riserbandomi di pubblicare in altra sede, col corredo delle necessarie illustrazioni, tali indagini, espongo qui brevemente il risultato delle mie ricerche, le quali dimostrano come il fenomeno debba sicuramente attribuirsi al moto di subsidenza subìto dalla regione dai tempi di Augusto fino al medio evo: condizioni, queste, che non erano state, fino a pochi anni or sono, riconosciute dai geologi, e che non sono tuttora ammesse dalla maggior parte degli archeologi, che si sono occupati dell'interessante plaga, nella quale prosperò per quasi un millennio una grande città con elevato grado di civiltà e di cultura.

Fra i geologi, invero, dopo il semplice accenno, incidentalmente espresso, dal Günther [1]) nel 1903 a proposito delle oscillazioni secolari della linea di spiaggia in questo tratto della costa tirrena, soltanto il De Lorenzo nel 1930 riconobbe nel processo di abbassamento della terra la causa vera della graduale scomparsa di Paestum, e ne chiarì la portata in una breve nota, inserita nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei [2]).

---

[1]) Günther R. T. *Contributions to the study of Earth-movements in the bay of Naples*, p. II, p. 45. Oxford, 1903.

[2]) De Lorenzo G. *Sulla causa geologica della scomparsa dell' antica città*

Le nuove opere di escavazione, che in questi ultimi anni, sotto gli auspici della Commissione Archeologica di Salerno e sotto la direzione del Soprintendente alle Antichità della Campania prof. A. Maiuri hanno avuto nuovo e più considerevole impulso rimettendo in luce altri tratti dell'antica città, mi consentono di aggiungere ulteriori dati sulle condizioni e sulla successione dei depositi terrosi e calcarei che seppellirono le vie e le case di Paestum, e quindi di confermare e di precisare l'opinione del De Lorenzo sulla causa geologica che determinò il considerevole accumulo di essi in breve volgere di tempo.

***

Sono note le principali vicende storiche dell'antica Poseidonia, fondata dai coloni greci verso la fine del VII secolo av. Cr., successivamente conquistata dai Lucani nel quarto secolo, e divenuta poi, col nome di Paestum, colonia latina dal 273 av. Cr. fino alla caduta dell'impero.

Della città, che ebbe la meravigliosa fioritura attestata dai superbi templi dorici e dagli altri tesori d'arte rimessi in luce, trattarono già scrittori e poeti d'ogni tempo: a cominciare da Erodoto, Virgilio, Properzio, Ovidio, Strabone, Marziale, Columella ecc., fino a Tasso, Cluverio, Gatta, Mazocchi, Saint Non, Goethe, ecc.; e delle condizioni fisiche e climatiche, in cui essa venne a trovarsi dopo la sua fondazione, esistono pure testimonianze molteplici e concordi.

Da quanto ci hanno riferito i vari autori noi possiamo oggi sicuramente affermare, che Paestum, dopo aver goduto per alcuni secoli di un clima salubre e di un suolo fertile, cominciò, al principio dell'èra cristiana, a presentare segni gradatamente più numerosi e più gravi di malaria e di improduttività nel suo territorio. Questo venne mano a mano invaso dalle acque stagnanti, e divenne sempre più acquitrinoso e paludoso nei secoli successivi, fino a raggiungere un massimo nel periodo del Rinascimento. Dopo secoli di fioritura, di alta civiltà, di incursioni, di lotte, di spogliazioni, la città soggiacque a completo abbandono e venne pressochè dimenticata: sicchè non è se non attraverso i ricordi storici della sua antica fama che se ne trova traccia negli scrittori del XV e del XVI secolo. Gli studiosi più tardivi accennano già nel secolo XVIII a condizioni climatiche meno sfavorevoli e ad un ripristino di opere agricole ed industriali, che si continuarono poi, con varie fasi ed alternanze successive, fino ai tempi nostri.

---

di Paestum. Rend. R. Acc. Naz. Lincei, Cl. Sc. fis., mat. e nat., s. 6.ª, vol. XI, 1° sem., p. 1062. Roma, 1930.

Se le incursioni saracene, le lotte e le distruzioni possono aver
eterminato periodi di decadenza ed avere, forse, contribuito pure alla
vina della città, è dunque chiaro che il destino dell'antica Posidonia
stato segnato essenzialmente dalla sua terra, cioè dal clima reso in-
lubre per lo stagnare delle acque, e che i lavori di drenaggio, ese-
uiti dagli abitanti per dare a queste un più rapido deflusso ed atte-
ati da tracce non dubbie nel sottosuolo della città, a nulla valsero
ontro la lenta ma inesorabile salita del livello idrostatico.

Che sia stata effettivamente questa forza naturale, la quale mo-
ificando in tempi attuali e storici il livello medio marino della re-
ione ne cangiò le condizioni di fertilità e di abitabilità, noi cerche-
emo di dedurre obbiettivamente dall'esame diretto dei materiali che
ostituiscono la piattaforma rocciosa di Paestum e di quelli che, tra-
portati più tardi dalle acque, si sovrapposero ai precedenti invadendo
ran parte della città, colmandone le strade e le case, addossandosi
lle mura e modificando il clima e la vegetazione.

***

Come è noto, l'antica città di Paestum fu fabbricata su di una
iattaforma di travertino, la quale si può assai agevolmente seguire
ungo la bella via, recentemente scavata e sistemata, che segue il pe-
rimetro, irregolarmente trapezoidale, delle mura. Tale piattaforma,
che costituisce il piano di fondazione delle varie costruzioni e che fornì
a queste il magnifico materiale che, squadrato e lavorato in grossi bloc-
chi, ancor oggi si ammira nei massicci paramenti della cinta muraria
e nei mirabili templi dorici, si trova attualmente ad un'altezza varia-
bile tra i 6 e i 18 metri sul livello del mare [1]).

Ma la formazione travertinosa, benchè limitata in superficie, si
estende ancora al di là delle rovine pestane, tanto a nord e ad est,
cioè in direzione del fiume Capodifiume col quale è geneticamente col-
legata, quanto verso sud, in direzione cioè del corso del Solofrone.

Pur tuttavia non raggiunge mai fuori la città quote molto elevate,
essendo per lo più mascherata sotto le alluvioni quaternarie e recenti
portate dal Sele e dai minori corsi d'acqua contigui, le quali si svi-
luppano considerevolmente ad ovest e a nord di Paestum [2]), ove l'a-

---

[1]) Dai dati, cortesemente favoriti dal prof. Antonio Marzullo e determi-
nati in quest'anno 1934 (maggio) risulta, per il piano del tempio di Net-
tuno la quota di m. 17,748, e per l'asse della soglia di Porta Marina, quella
di m. 5,99.

[2]) Un'antica trivellazione, eseguita a Barizzo, presso la stazione di Al-
banella, cioè a poco più di sette chilometri a nord di Paestum, nella proprietà

zione combinata delle correnti litoranee e dei venti le ha gradatamente trasformate in dune sabbiose lungo la costa attuale.

Limitando le nostre indagini alla zona immediatamente circostante alla città, ove — come s'è detto — il travertino si può nettamente seguire al di sotto della cinta muraria recentemente isolata fino alla sua base, è interessante osservare come questo *substratum* calcareo delle costruzioni non scende uniformemente e regolarmente in profondità, perchè in vari punti, specialmente lungo i lati settentrionale ed orientale delle mura, è chiaramente visibile — sotto un deposito superficiale di travertino il cui spessore varia da luogo a luogo scendendo fino ad un *minimum* di circa mezzo metro — uno strato terroso di color bruno-scuro, sovrapposto alla massa di travertino inferiore la quale si spinge in profondità senza che sia possibile raggiungerne la base. Appare cioè, nello spessore verticale del travertino su cui venne edificata la città, una intercalazione di materiale terroso, di varia potenza e generalmente più spesso e più profondo man mano che si procede da ovest ad est, che principalmente per il ricco contenuto in sostanza organica ha assunto una colorazione bruna assai scura, qua e là resa più chiara dalla presenza di veli irregolari di incrostazioni bianche calcitiche. Nella massa, piuttosto plastica ed unita in alcuni punti, ricca di detriti e poco coerente in altri, sono diffuse sostanze argillose e ferrifere e si trovano disseminati piccoli pezzi (di pochi millimetri) di carbone. I detriti sono costituiti da nuclei calcitici concrezionari, ed inoltre dai resti seguenti, i quali si riscontrano sia nel materiale originario che in quello calcinato e nel residuo insolubile in acido cloridrico: *a)* abbondanti resti di diatomee, che richiamano specialmente forme dei generi *Pinnularia, Stauroneis, Gomphonema, Melosira* ecc.; *b)* rare spicule silicee a quattro o cinque assi, che dal punto di vista morfologico ricordano quelle di alcuni spongiari, mentre per la mancanza di un canale assiale sono più probabilmente da attribuirsi a radiolari; *c)* schegge di vetro compatto o pumiceo; *d)* lamine di biotite; *e)* detriti di sanidino, di pirosseno e di magnetite; *f)* più rari detriti di plagioclasio.

Più ad est, cioè sul lato delle mura che guarda l'attuale stazione ferroviaria di Paestum, l'altezza visibile del banco di travertino è interrotta nuovamente, a circa 2 m. di profondità, da uno strato di materiale sabbioso, il quale è stato messo in vista per oltre due metri

---

del barone Ricciardi, a circa 100 metri dal Sele, ha attraversato quasi 40 metri di argille e sabbie sovrastanti ad una puddinga sciolta, cioè una ricca serie di depositi alluvionali e di spiaggia marina, senza che si sia incontrato il travertino (D'Erasmo G. *Studio geologico dei pozzi profondi della Campania.* Boll. Soc. Naturalisti, vol. XLIII, pag. 118. Napoli, 1931).

di altezza da uno scavo in esso eseguito per estrazione di sabbia da malta. Questo deposito è abbastanza diverso dal materiale terroso sovrastante già accennato e che quivi raggiunge una potenza di pochi decimetri soltanto. La massa sabbiosa, che in posto appare compatta benchè sia attraversata da numerose piccole cavità, di pochi mm. di diametro, che hanno le pareti incrostate da concrezioni calcitiche, si sfarina facilmente, riducendosi polverulenta fra le dita. Solo in qualche tratto, per effetto di una più progredita cementazione, il materiale appare piuttosto tenace. Questa sabbia calcarea, di colore bianco-gialliccio e a grana minutissima, risulta costituita per circa il 90 % da granuli di calcite, con assenza di magnesio, e mostra frequenti piccole conchiglie di *Helix* insieme con frammenti di altri gasteropodi terrestri, oltre ad alcuni minuti detriti di roccia calcarea. Tutta la massa è impregnata di poco ferro (in gran parte ferrico), quasi uniformemente diffuso. Il restante 10 % circa è costituito in gran parte da sostanze organiche, che si separano dalla soluzione cloridrica sotto forma di una sostanza bruna colloidale. In assai scarsa percentuale si notano infine noduli arrotondati di calcedonio fibroso-raggiato, resti di minutissime diatomee, spicole forse spettanti a radiolari, e schegge di sanidino, di plagioclasio, di augite e di qualche anortoclasio, oltre a tracce di magnetite.

Invece nel tratto occidentale della città, il banco calcareo travertinoso che sorregge le mura e tutto il complesso difensivo della Porta Marina si continua ininterrottamente in profondità almeno per uno spessore di circa 5 m., come si può constatare nei due pozzi, l'uno antico, l'altro recente, scavati nel vestibolo della detta Porta e che servono di accesso alla sottostante Cloaca: un cunicolo, questo, di circa 80 cm. di larghezza e alto in media m. 1.70, tutto cavato nel travertino, che si presenta ora rivestito da posteriori incrostazioni calcaree. È da ritenere che tale cunicolo dovesse essere stato costruito, o almeno utilizzato, come drenaggio, per raccogliere e trasportare le acque d'infiltrazione del sottosuolo della città (Marzullo A., *Paestum. I templi e i nuovi scavi*, pag. 32. Salerno, 1933).

Ma per lo scopo delle presenti ricerche offre maggiore interesse l'esame dei sedimenti che, in tempi storici posteriori alla costruzione della città e all'abbandono di essa da parte degli abitatori, ne invasero le strade e le case, accumulandosi con potenza varia nei diversi punti, fino a raggiungere nella parte bassa della città uno spessore verticale di oltre 5 metri, qual'è quello che può agevolmente misurarsi nei pressi di Porta Marina, ove la serie detritica, che i recenti lavori di escavazione hanno opportunamente lasciata intatta in alcuni punti, offre uno *specimen* interessante e completo di quei terreni e contribuisce a chiarire, dal lato geologico, l'ulteriore storia della regione.

Questi sedimenti, che all'esterno di Porta Marina, presso la Torre Circolare di costruzione greca, misurano m. 5.50 di altezza dal ciglio della collina al livello dell'antica strada, mentre nel vestibolo della porta stessa hanno, in conseguenza del forte pendìo della pavimentazione della via romana, uno spessore considerevolmente minore e, in media, di m. 2 a 2.70, mostrano, nella zona del loro maggiore sviluppo, dalla base verso l'alto strati di sabbia, con intercalazione di stratelli a grana più minuta, vero limo argilloso con pezzi di carbone, indi nuovi strati di sabbia incoerente a grana più grossa con noduli di concrezioni calcaree, e finalmente verso la superficie una specie di conglomerato sciolto, cioè ad elementi più misti ed irregolari, con più abbondanti pezzi di manufatti, laterizi ecc., il quale facilmente rivela la sua età estremamente recente.

Esaminando più minutamente questi materiali, si può precisare, che le sabbie, generalmente di color grigio-terra, hanno grana mista, dal pulverulento fino ad elementi di qualche cm^3. Esse risultano in massima parte costituite da incrostazioni di carbonato di calcio (impuro per ferro, sostanze argillose ed organiche) depositatesi intorno a frustoli vegetali, da concrezioni calcitiche informi spesso arrotondate per rotolamento, e da detriti minutissimi polverulenti fino ad un vero limo. Anche questo limo è a nuclei calcitici rivestiti da sostanza argilloso-organica. Tutto il deposito offre pertanto i caratteri di quelle masse fangose, più o meno argillose, che, sedimentate sul fondo di prati umidi, nelle torbiere o al di sotto di acque poco profonde, e rimaste tuttora allo stato pulverulento, gli autori abitualmente ascrivono ai tufi calcarei incoerenti.

Sparsi nella massa si trovano, come si è già accennato, frantumi di laterizi, pezzetti di carbone, resti di conchiglie di *Helix*, avanzi di diatomee, detriti di plagioclasii e di sanidino, schegge e prismi interi (con spigoli non arrotondati) di augite, lamine e frammenti di cristalli di biotite, granelli di magnetite e probabilmente anche granuli di olivina. Sono altresì frequenti, a vari intervalli, nuclei dello stesso materiale e del medesimo colore, perfettamente cementati.

Le descritte masse sabbiose si fanno generalmente un poco più compatte e più resistenti in vicinanza delle antiche costruzioni, e queste presentano, un po' da per tutto in questa zona occidentale e meridionale della città, i loro grossi blocchi di travertino rivestiti da altre croste travertinose, che in qualche punto sono riccamente sviluppate e si sono così perfettamente addossate e saldate alle superfici lavorate delle antiche mura da nascondere completamente le commessure fra i vari pezzi e da rendere arduo e difficoltoso, per la completa identità dei caratteri, oltre che per l'aderenza e la relativa tenacità della roccia, il lavoro di isolamento della pietra concia più antica

dalle masse di incrostazioni più recenti. Incrostazioni travertinose riccamente sviluppate si sono trovate pure lungo la cinta muraria del tratto di sud-ovest, sinora da questo versante completamente seppellita, cioè lungo la nuova strada, che va verso il mare.

Benchè sia facile ed ovvia la spiegazione di questi depositi di calcare incrostante, evidentemente dovuti alle acque ricche di carbonato di calcio di cui già ai tempi di STRABONE e di PLINIO erano note le proprietà lapidescenti, c'è a domandarsi perchè la precipitazione di questo sale abbia, a contatto dei blocchi di travertino delle antiche costruzioni pestane, determinata la formazione di depositi concrezionari più consistenti, veramente travertinosi e in qualche punto a caratteri stalattitici, mentre nella massa dei depositi sabbiosi che le stesse acque andavano depositando abbia soltanto formato piccole incrostazioni di carbonato di calcio intorno a frustoli vegetali, o a piccoli ciottoli, o a minutissimi detriti, che non si sono ulteriormente cementati.

Non potendosi pensare ad una ragione cronologica, cioe ad una deposizione del carbonato di calcio più abbondante in un primo tempo, quando non s'erano ancora formati i sedimenti sabbiosi, e poi diminuita o cessata al depositarsi di questi, si deve ritenere, che la precipitazione di detto sale sia stata facilitata dalla presenza dei massi di travertino delle costruzioni, perchè essi costituendo un ostacolo al regolare deflusso delle acque ne determinavano un certo ristagno, e quindi una lenta evaporazione e una più lenta infiltrazione attraverso le commessure dei blocchi, stabilendo condizioni più favorevoli per la formazione delle croste travertinose e stalattitiche. Nella massa dei sedimenti sabbiosi, invece, l'acqua ricca di bicarbonato di calcio, passando più rapidamente, non produsse una vera cementazione ed un deposito solido di travertino. Lo stesso fenomeno è stato osservato dal DE ANGELIS D'OSSAT nel sottosuolo romano delle Catacombe di S. Valentino ai Parioli, nel quale « dove le acque erano animate di velocità, secondo questa si componevano le sabbie e le ghiaie; dove erano ferme, o quasi, le marne e le argille, più o meno ricche di concrezioni calcaree » [1]).

Comunque, ciò che a noi importa ora mettere in particolare rilievo è il fatto, che se nella parte bassa della città di Paestum — ove presentemente il livello della strada romana sulla Porta Marina è, come si è detto, a m. 5,99 sul mare attuale — si sono depositate masse fangose e detritiche e incrostazioni calcaree di carattere travertinoso,

---

[1]) DE ANGELIS D'OSSAT G. *La geologia e le catacombe romane*. Memoria V. Mem. Pontif. Acc. Sc. Nuovi Lincei, s. 2ª, vol. XVI, pag. 906. Roma, 1932.

le quali si addossarono e si saldarono alle antiche costruzioni fino ad un'altezza di circa m. 5.50, cioè fino a far quasi scomparire la maggior parte delle mura di quella zona, vuol dire che almeno fino a quel livello devono essere giunte le acque fluenti della regione, che ora si sono scavate nuovi alvei, lungo i quali scendono più rapidamente al mare.

Lo dimostra la natura, già indicata, dei depositi, i quali contenendo avanzi di organismi terrestri e di acqua dolce, piccole concrezioni calcitiche, sostanze carboniose e fangose, facilmente rivelano l'ambiente palustre e paludoso nel quale si costituirono, al di sotto di acque poco profonde.

Questa conclusione geologica prova dunque l'esistenza, nella regione, di oscillazioni secolari della linea di spiaggia, cioè di bradisismi, che non si sono verificati soltanto durante l'èra volgare, rendendo malsana la città già nei primi tempi dell'impero e seppellendola più tardi, gradatamente, fino al medio evo, sotto una spessa coltre di depositi fangoso-calcarei, acquitrinosi e malarici, ma si erano avuti altresì, e forse in misura maggiore, in tempi precedenti alla costruzione dell'antica Poseidonia (com'è provato dalla intercalazione di analoghi strati detritici e organici al travertino che forma il piano di fondazione degli edifici e delle mura), e si continuano ancora sotto i nostri occhi, ostacolando, per ora almeno, con un nuovo moto di abbassamento, le grandi opere di bonifica intraprese lungo quel litorale. Nè il fenomeno è esclusivo alla zona pestana; chè ormai lungo tutta la costa tirrena dell'Italia meridionale esistono prove numerose ed indubbie di queste oscillazioni, con le quali la terra mostra il suo lento, ma pur continuo respiro. Non è qui il caso di indugiare con esempi, che sono del resto abbastanza noti: basterà rilevare, che il bradisismo è esteso tanto nella formazione calcarea, come in quelle vulcaniche del nostro litorale. Le condizioni di Paestum sono quasi l'esatta ripetizione di quelle presentate dalla regione Pontina, per la quale fin dal 1883 Arturo Issel nel suo volume su *Le oscillazioni lente del suolo o bradisismi* (Atti R. Univ. Genova, vol. V, pag. 210) ebbe giustamente ad osservare quanto segue:

« Le paludi Pontine furono già un territorio fertilissimo, i cui prodotti contribuivano all'alimentazione della capitale. Plinio accerta che vi fiorivano 33 città, alcune delle quali situate in luoghi ora occupati dalle acque. In quel territorio ebbe luogo la fiera guerra dei Romani contro i Volsci.

Nell'anno 262 di Roma, durante una carestia, si sperava di ottenere dall'Agro Pontino il frumento di cui abbisognava la città; dopo un secolo, nel 367, i tribuni della plebe in Roma sollecitavano la divisione di quel territorio che ebbe luogo dopo cinque anni. Quale van-

aggio avrebbe potuto sperare la plebe romana da questo provvedimento se il paese fosse stato nelle condizioni odierne? Non v'ha dubbio dunque che esso era asciutto e non malsano. Nel 442 di Roma fu costrutta attraverso di esso, sotto il censore Appio Claudio, la via che portò il suo nome.

È probabile che prima di questa epoca, in tempo più o meno remoto, il paese sia stato paludoso, perciocchè sotto il selciato della via Appia si trovarono strati di torba e sedimenti d'acqua dolce fino alla profondità di 22 m., alla quale s'incontrò la formazione marina.

Da quanto precede, come pure dalle osservazioni da me fatte alla grotta delle Capre e sulle rive del lago di Paola, risulta:

1.° che le pianure e le paludi che circondano il Circeo furono originariamente occupate dal mare; ciò probabilmente, fino al declinare del periodo quaternario;

2.° che subirono verso l'epoca accennata un sollevamento mercè il quale si ridussero allo stato di terre emerse e coltivabili;

3.° che durante i primi secoli di Roma furono coltivate e sparse di città e villaggi e per conseguenza si trovavano nelle condizioni di terre emerse;

4.° che prima del IV secolo di Roma, ma in epoca ignota, cominciarono a deprimersi e si fecero acquitrinose e malsane.

Questa condizione di cose, che pur troppo ancora sussiste, era simultaneamente aggravata dal formarsi lungo le rive del mare di cordoni littorali sabbiosi e di dune, le quali ritardavano o intercettavano l'afflusso delle acque correnti alle loro foci. In conclusione, le condizioni topografiche delle paludi Pontine, come di gran parte dell'Agro Romano e la malaria che ne consegue derivano precipuamente dalla successione dei due fenomeni, cioè: formazione d'una pianura per la emersione di un fondo marino, avvallamento parziale del territorio emerso ».

Le osservazioni in contrario, fatte da Rovereto nel suo *Trattato di Geologia morfologica* (pag. 231. Milano, Hoepli, 1923), cioè che i bradisismi veri delle rocce massicce non abbiano nulla a che fare con i bradisismi apparenti di intasamento o costipamento delle rocce alluvionali, sono chiaramente confutate dal fatto, che le oscillazioni positive e negative della linea di spiaggia, accertabili sulle massicce rocce calcaree dell'isola di Capri e della penisola di Sorrento, corrispondono perfettamente a quelle, che si possono constatare nelle due zone limitrofe dei golfi di Napoli e di Salerno [1]), dove si verificano

---

[1]) Cfr. a questo riguardo, fra i lavori numerosi che trattano dell'argomento, specialmente i seguenti: Babbage C. *Observations on the Temple of Serapis at Pozzuoli near Naples*. Quart. Journ. Geol. Soc., vol. X. Londra,

egualmente sia nei terreni vulcanici della zona flegrea, che in quelli alluvionali della pianura di Paestum.

Napoli, Istituto geo-paleontologico della R. Università, giugno 1934 - XII.

1847. — DE LORENZO G. e RIVA C. *Il cratere di Vivara nelle isole Flegree.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. X, n. 8. Napoli, 1900. — GÜNTHER R. T. *Contributions to the study of Earth-Mouvements in the Bay of Naples.* Oxford, 1903. — GÜNTHER R. T. *A bibliography of topographical and geological works on the Phlegraean Fields.* Londra, 1908. — DE LORENZO G. *I Campi Flegrei.* « Italia artistica », vol. 52. Bergamo, 1909. — GÜNTHER R. T. *Pausilypon.* Oxford, 1913. — DE LORENZO G. e SIMOTOMAI H. *I crateri del Monte Gauro nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. XVI, n. 10. Napoli, 1915. — D'ERASMO G. *I crateri della pozzolana nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat., s. 2ª, vol. XIX, n. 1. Napoli, 1931. — MARZULLO A. *La grotta marina della costa di Amalfi.* Riv. delle staz. di cura, soggiorno e turismo, anno VIII, n. 12, pag. 17. Roma, 1932. — MAIO E. *Il bradisisma flegreo.* Annali R. Osserv. Vesuviano, 4ª s., Vol. II. Napoli, 1933.

Contributo allo studio chimico di una roccia eruttiva della Punta delle Pietre Nere *(Foggia)*

Nota della dott. **Silvia Restaino**

(Adunanza del dì 16 giugno 1934 - XII)

Sunto. — Si rende conto dei risultati ottenuti nell'analisi chimica di una roccia eruttiva della Punta delle Pietre Nere, in provincia di Foggia. Questi risultati, che contribuiscono alla conoscenza di queste rocce, finora assai poco studiate dal punto di vista chimico, hanno portato alla conferma, che la roccia analizzata va considerata come una Kersantite, appartenente ad un filone lamprofirico, notevolmente differenziato in senso basico.

È ben nota l'importanza geologica della Punta delle Pietre Nere, così chiamata per la colorazione complessiva delle rocce che la costituiscono, situata sul litorale adriatico, presso la Torre Fortore ad ovest del Gargano ed a Nord del Lago di Lesina, in provincia di Foggia. Colà, infatti, affiorano le rocce sedimentarie più antiche del Tavoliere di Puglia, che appare come un vasto piano inclinato, formatosi sul finire del Pliocene e nel Quaternario e vi si osservano le sole documentazioni del vulcanismo di tutta la regione pugliese.

Dal Pilla (1840) in poi, l'attenzione degli studiosi si è volta alla investigazione di queste rocce caratteristiche, cosicchè attraverso le osservazioni di Pilla, di Tchihatcheff, di Collegno, di d'Archiac, di van Hauer, di Tellini, del di Stefano e di Viola, le nostre conoscenze sulla natura delle pietre nere suddette si sono venute approfondendo.

Per quanto riguarda le rocce eruttive, che costituiscono un filone attraversante gli strati pure neri, perchè bituminosi, del trias, il Viola, che ne fece un accurato esame mineralogico (Bull. del R. Comitato Geologico d'Italia, 1904, pag. 391), concluse trattarsi di un filone differenziato in senso melanocrato, i cui componenti essenziali sono: ortosio, plagioclasio, augite più o meno uralitizzata, biotite, anfibolo ed olivina; mentre come componenti accessori si riscontrano: rutilo, ematite, ilmenite, apatite, titanite, magnetite, granato, pirite.

Esse presentano struttura panidiomorfa e variabile, come accade nelle rocce filoniane, del tipo granitico, a quello porfirico, e possono riguardarsi come aventi una evidente relazione genetica, strutturale e di composizione mineralogica con quelle della costa dalmata prospi-

ciente rispetto alle quali sembrano presentare un diverso grado di differenziazione magmatica.

Del tutto manchevole era però finora la conoscenza della composizione chimica di queste rocce, per colmare questa lacuna il compianto prof. Ferruccio ZAMBONINI aveva progettato l'esecuzione di alcune analisi chimiche a questo riguardo.

In questa nota rendo conto dei risultati ottenuti, analizzando il materiale a me affidato dal compianto Maestro.

I metodi eseguiti nell'analisi sono in generale quelli indicati dall'HILLEBRAND (The analysis of Silicate and carbonate Rocks'). Da un pezzo di roccia di circa 100 gr. ridotto in polvere impalpabile, fu preparato un campione unico, omogeneo, da cui vennero prelevati i vari campioni, occorrenti per le diverse determinazioni. In un campione, fuso con carbonato sodico, furono dosati: la silice (e controllata la purezza con acido solforico e acido fluoridrico); gli ossidi di ferro, alluminio; l'ossido di calcio e infine il magnesio come pirofosfato.

Il titanio, precipitato insieme al ferro, ed all'alluminio; venne dosato col metodo colorimetrico, come pure le tracce di manganese, precipitate insieme al calcio e al magnesio.

Per la ricerca degli alcali, fu seguito il metodo di LAWRENCE-SMITH; l'attacco della roccia fu fatto con cloruro ammonico, ottenuto per sublimazione, e carbonato di calcio, ottenuto per precipitazione. Il litio fu dosato allo spettroscopio, partendo da una soluzione titolata di cloruro di litio.

L'acqua totale venne dosata col metodo di PENFIELD (Zeit. F. anorg. Chem. 7 [1884] 22), avendo avuta la cura di mandar via tutta l'acqua dal tubo con una leggera aspirazione.

Un altro campione fu attaccato con acido solforico e acido fluoridrico; nel residuo fu dosato il bario, come solfato (dopo averlo purificato dal calcio), il bario fu dosato anche allo spettroscopio: nel filtrato dell'attacco poi vennero dosati il titanio e il manganese totale, col metodo colorimetrico; e il ferro totale col metodo di MARGUERITE. Mentre il ferro ferroso fu dosato (titolandolo con $KMnO_4$) in un campione a parte, attaccato con acido solforico ed acido fluoridrico, in corrente di anidride carbonica.

Per l'anidride carbonica, venne eseguita la determinazione diretta col metodo CLAUSIUS-LASSEN.

Il vanadio e l'acido fosforico vennero determinati in campioni più grandi; la fusione fu fatta con carbonato sodico e nitrato potassico; il vanadio risultò assente e l'acido fosforico presente solo in tracce.

La roccia è di aspetto nero lucente di tipo lamprofirico kersantitico e lascia manifestamente vedere fenocristalli di anfibolo, allungati

secondo l'asse verticale ed aventi secondo tale direzione un lunghezza di 20 mm. circa. L'augite è anch'essa allungata nello stesso senso e raggiunge dimensioni analoghe. La mica biotite è abbondante e conferisce decisamente splendore alla roccia.

Sono ben visibili inoltre cristalli di olivina e di plagioclasi, qualche rarissimo aghetto di apatite incolora, cristallini gialli di titanite, nonchè rari cubetti di pirite.

Con rincrescimento ho dovuto rinunciare ad un esame della roccia in sezioni sottili mancandomi i mezzi per tale ricerca.

Risultato dell' analisi

SiO_2 %	38,60	
Fe_2O_3	13,18	
FeO	5,98	
AL_2O_3	10,19	
MnO	0,18	
TiO	1,40	
CaO	14,63	
MgO	7,18	
BaO	0,12	(0,1116 Spettrosc.)
Na_2O	2,13	
K_2O	2,29	
H_2O —	0,30	
H_2O +	2,40	
CO_2	0,89	
SO_4	0,15	
Cl	0,05	
Li_2O	0,0004	
P_2O_5	tracce	
V	assente	
Sr	»	
Totale	99.67	

Si tratta, come si vede, di un filone lamprofirico notevolmente differenziato in senso basico.

I MURI AD ANGOLO DI CEMENTO ARMATO PER SOSTEGNO DELLE TERRE

Memoria dell' Ing. **Franco Jossa**

(presentata nell' adunanza del dì 3 febbraio 1934 - XII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — Si studia il muro ad angolo di cemento armato per sostegno delle terre, supponendo che le reazioni del terreno, su cui poggia la suola del muro, siano proporzionali agli abbassamenti, punto per punto. Si considerano i due casi, del muro a suola esterna, priva di carichi direttamente applicati, e del muro a suola interna, caricata direttamente. Si pongono in luce la legge di variazione dei momenti flettenti e degli sforzi di taglio nelle sezioni trasversali della suola, il cambiamento di segno di dette sollecitazioni, e l' eventuale innalzamento delle estremità della suola. Si determina la lunghezza di suola effettivamente reagente, nei diversi casi; e in ultimo si indica la possibilità di determinare la lunghezza reale di essa in modo che risulti tutta reagente.

SOPRA ALCUNI AVANZI DI VERTEBRATI FOSSILI DELLA PATAGONIA

Memoria del socio ordinario **G. D' Erasmo**

(presentata nell' adunanza del dì 10 marzo 1934 - XII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — Vengono descritti e figurati alcuni avanzi di vertebrati — in massima parte selaci, oltre a pochi teleostei e rettili — raccolti dal dott. E. FERUGLIO in diverse formazioni del Cretaceo e del Terziario della Patagonia (regioni del golfo di San Giorgio e del Lago Argentino).

IL TRATTATO DI LEONARDO DA VINCI SULLE TRASFORMAZIONI DEI SOLIDI

Memoria del socio ordinario **R. Marcolongo**

(presentata nell' adunanza del dì 7 Aprile 1934 - XII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — L' analisi critica delle due ben distinte parti del Codice Forster I, pubblicato dalla R. Comm. Vinciana nel 1930 per la prima volta, costituisce l' oggetto della presente memoria. Essa è pure divisa in due parti.

Nella prima viene esposta, riordinata, chiarita e commentata in relazione ad analoghe ricerche contenute nei ms. vinciani, la redazione, non certo definitiva ma pur tuttavia chiara ed ordinata, dei tre capitoli di un trattato, composto da Leonardo ai primi del 1500, sulla trasformazione di solidi in altri equivalenti.

Nella seconda parte della memoria si considerano, e si tenta di darne una retta interpretazione, i numerosi disegni tracciati da Leonardo nell'ultima parte del Codice, specialmente per la parte che riguarda la vite d'Archimede; parte che deve ritenersi appartenere ad epoca anteriore al 1500. Ancor qui l'esame vien fatto in confronto con tutte le analoghe ricerche vinciane sparse in tutti gli altri ms.

Sulle funzioni di composizione di matrici

Memoria del socio corrispondente **G. Andreoli**

(presentata nell'aduuanza del dì 14 aprile 1934 - XII
per essere inserita nel vol. XX degli Atti)

Sunto. — Un recente gruppo di ricerche, dovuto a Giorgi, Fantappiè, Finzi, Amato, per la scuola italiana, e principalmente al Cartan fuori d'Italia, si occupa di dare un significato concreto al simbolo $f(M)$, ove $f(\xi)$ sia una funzione analitica della variabile ξ, ed $f(M)$ sia il simbolo da definire, ottenuto sostituendo alla variabile numerica complessa ξ, la variabile matrice M, di un certo ordine prefissato.

Per noi, la questione anzidetta, deve ritenersi essenzialmente collegata, più che alle matrici, alle algebre, ed è in tal senso accennato alle linee di tale sviluppo in una Memoria pubblicata negli Atti della Accademia Gioenia, in Catania. I risultati raggiunti nella presente Memoria sono riportati in fondo, nelle « *Conclusioni* ».

Noi qui studiamo le funzioni di matrici. Sostanzialmente interpretiamo le matrici come rappresentate ognuna da un punto di un certo spazio lineare, nel quale spazio si fissano i concetti di somma e di prodotto di punti.

Ogni funzione di matrice viene considerata come definita su certe varietà (composte di spazi lineari e chiamate di *Volterra*) caratterizzate dal fatto che, in esse, due matrici commutabili con una terza (tutte appartenenti alla stessa varietà di Volterra) sono commutabili fra loro.

Le eccezioni sollevate ed osservate dai diversi autori derivano dal fatto che per riempire lo spazio di matrici occorre passare da una ad

un'altra varietà di Volterra. Ciò introduce una specie di polidromia; tale fatto è ben messo in risalto attraverso opportuni esempi.

Con tali premesse, il calcolo delle funzioni di composizione di matrici risulta estensione dell'ordinaria teoria delle funzioni di variabile complessa.

Attraverso la presente teoria sviluppiamo sostanzialmente un concetto unitario delle dette funzioni, riattaccandoci a procedimenti dati in alcune nostre Note Lincee sulle equazioni di composizione (1916-1917).

L'elemento caratteristico e basilare di tutto il procedimento deriva appunto da tali Note e dalla considerazione delle già indicate *varietà di Volterra.*

Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 ipercomplesso

Memoria del prof. **N. Spampinato**

(presentata nell'adunanza del dì 12 maggio 1934 - XII
per essere inserita uel volume XX degli Atti)

Sunto. — Si studia l' S_3 rigato stabilendo in esso un nuovo sistema di coordinate omogenee (x, y) con x, y elementi dell' algebra regolare complessa di ordine 4.

Processo verbale dell'adunanza del dì 13 gennaio 1934 - XII

All'adunanza, presieduta dal vice-presidente Scorza, partecipano soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, e i soci corrispondenti Colosi, Nobile, Pascal Mario, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 9 dicembre, che è approvato. Indi comunica la lettera del prof. Henry Fairfield Osborn che esprime all'Accademia la sua gratitudine per la nomina a socio straniero nella sezione delle Scienze Naturali.

Il socio Quercigh, tanto in nome proprio che dei colleghi Bakunin e Giordani, legge la relazione sul concorso al premio Zambonini di lire duemila, chiuso il 12 gennaio 1933, la quale conclude con la proposta che il premio predetto venga diviso in due parti uguali da assegnarsi rispettivamente ai concorrenti signori Gallitelli dott. Paolo e Parascandola dott. Antonio.

L'Accademia approva a voti unanimi le conclusioni di tale rapporto, che verrà stampato nel Rendiconto. La proclamazione dei vincitori avrà luogo, a norma dello Statuto, nell'adunanza plenaria della Società Reale del gennaio 1934.

Il socio Scorza presenta una nota I del dott. Giuseppe Zicari, *Sulle superficie del 3.° ordine*, proponendone la inserzione nel Rendiconto. L'Accademia delibererà nella prossima tornata.

Processo verbale dell'adunanza del dì 20 gennaio 1934 - XII

Partecipano all'adunanza i soci ordinari residenti Giordani (presidente), Bakunin, Bottazzi, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Signorini, ed i soci corrispondenti Andreoli e Pascal Mario.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 13 gennaio, che viene approvato. Indi comunica la lettera del prof. Giulio Andreoli, che ringrazia l'Accademia per la sua nomina a socio corrispondente nella Sezione delle Scienze matematiche, e l'invito del Comune di Chiavari a partecipare alla commemorazione del grande botanico Federico Delpino nella ricorrenza del primo centenario della nascita. L'Accademia stabilisce di aderire a tale ceri-

monia, facendosi rappresentare dall'oratore ufficiale prof. Augusto BEGUINOT.

Indi si approva a voti unanimi la inserzione nel Rendiconto della nota I del dott. Giuseppe ZICARI, *Sulle superficie del 3.° ordine.*

Il socio SCORZA presenta una II nota dello stesso autore sul medesimo argomento e ne riferisce, proponendone l'accoglimento per la stampa. Su questo lavoro, che rimane a disposizione dei soci, l'Accademia delibererà nella prossima adunanza.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 febbraio 1934 - XII

All'adunanza, presieduta da S. E. GIORDANI, presidente dell'Accademia, assistono i soci ordinari residenti BAKUNIN, DE LORENZO D'ERASMO (segretario), DIAMARE, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, SCORZA, SIGNORINI e i soci corrispondenti ANDREOLI, CARRELLI, NOBILE, PASCAL Mario, QUERCIGH, RICCI e RIZZO.

Il Segretario legge il processo verbale della tornata 20 gennaio, che è approvato. Indi presenta l'ultimo fascicolo del Rendiconto 1933, recentemente pubblicato, nonchè le memorie dei soci DEL PEZZO e DIAMARE, inserite nel vol. XX degli Atti, e comunica i ringraziamenti dei dott. Paolo GALLITELLI e Antonio PARASCANDOLA, vincitori del concorso al premio Ferruccio ZAMBONINI. Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato il volume in memoria del compianto consocio ZAMBONINI, inviato dalla vedova, alla quale il Segretario non ha mancato di esprimere i ringraziamenti dell'Accademia.

L'Accademia approva a voti unanimi la stampa, nel Rendiconto, della nota II del dott. Giuseppe ZICARI *Sulle superficie del 3.° ordine*, presentata nella precedente adunanza dal socio SCORZA.

A norma delle vigenti disposizioni statutarie, il Segretario legge la Relazione, da stamparsi nel Rendiconto, sui lavori compiuti dall'Accademia durante l'anno 1933.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta per il Rendiconto, una sua nota *Sui sistemi chiusi di funzioni ortogonali ed un gruppo ad un parametro.*

Il socio corrispondente RICCI presenta, una nota del dott. Guido DEL VECCHIO dal titolo *Proprietà fondamentale della deformazione pura infinitesima di un corpo continuo*, e ne riferisce proponendone la inserzione nel Rendiconto. Uguale proposta di accoglimento fa il socio corrispondente QUERCIGH per una nota della prof. Silvia RESTAINO, *Sulla composizione chimica di un diopside cilestrino della eruzione vesuviana del 1906.* Su entrambe queste note, che rimangono a disposizione dei soci, l'Accademia deciderà nella prossima tornata.

Il socio corrispondente Ricci presenta, per gli Atti, una memoria dell'Ing. Franco Jossa sopra *I muri ad angolo di cemento armato per sostegno delle terre.* Il presidente nomina la Commissione composta dei soci Masoni, Ricci e Signorini, con l'incarico di riferire in una prossima adunanza.

Processo verbale dell'adunanza del dì 10 febbraio 1934 - XII

Assistono S. E. Giordani, presidente, i soci ordinari residenti Bakunin, Bottazzi, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Quagliariello, Scorza, Signorini, ed i soci corrispondenti Andreoli, Colosi, Pascal Mario e Ricci.

Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 febbraio, che è approvato. Indi comunica la richiesta di cambio pervenuta dall'Accademia Reale serba, che ha inviato il primo numero del Bollettino di scienze matematiche e naturali. L'Accademia stabilisce di accordare il cambio del Rendiconto a cominciare dall'anno corrente.

Con separata votazione l'Accademia approva, a voti unanimi, la inserzione nel Rendiconto delle note del dott. Guido Del Vecchio dal titolo *Proprietà fondamentale della deformazione pura infinitesima di un corpo continuo,* e della dott. Silvia Restaino *Sulla composizione chimica di un diopside cilestrino dell'eruzione vesuviana del 1906,* presentate nella precedente adunanza.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sulla definizione di certi indici, relativi a caratteri di omogania, in problemi statistici.*

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 marzo 1934 - XII

Partecipano all'adunanza, presieduta da S. E. Giordani, i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo (segretario), Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini, ed i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Pascal Mario, Ricci e Rizzo.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 10 febbraio, che viene approvato. Indi comunica la Ministeriale 24 febbraio, relativa all'approvazione della nomina del prof. Mauro Picone a socio ordinario non residente nella Sezione delle Scienze Matematiche.

Fra le pubblicazioni pervenute in omaggio sono segnalate quelle inviate dal socio Picone.

Su proposta dei soci Pascal e De Lorenzo, si incarica l'Ufficio

di Presidenza di esprimere il plauso dell'Accademia al socio corrispondente prof. Giunio SALVI per la sua recente nomina a Senatore del Regno.

Il socio corrispondente RICCI, anche a nome dei colleghi MASONI e SIGNORINI, legge la relazione sulla memoria dell'ing. JOSSA su i *Muri ad angolo di cemento armato per sostegno delle terre*, concludendo che si possa integralmente accoglierla per la stampa nel volume XX degli Atti. Messa ai voti tale proposta, è approvata all'unanimità dall'Accademia.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sugli indici di omogamia, pura ed attenuata, e su certe interpretazioni iperspaziali.*

Processo verbale dell' adunanza del dì 10 marzo 1934 - XII

All' adunanza, presieduta da S. E. GIORDANI, partecipano i soci ordinari residenti BAKUNIN, DE LORENZO, DEL PEZZO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, QUAGLIARIELLO, SCORZA, SIGNORINI, ed i soci corrispondenti ANDREOLI, CARRELLI, NOBILE, PASCAL Mario, RICCI e RIZZO.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 3 marzo, che viene approvato. Indi comunica la lettera del prof. Michael POLANYI, che ringrazia l'Accademia per la sua nomina a socio straniero nella Sezione delle Scienze naturali, e la Ministeriale 7 marzo, relativa all'approvazione della nomina dei soci S. E. GIORDANI e prof. SCORZA rispettivamente a Presidente e Vice-presidente dell'Accademia per l'anno 1934. Poscia partecipa, con profondo dolore, l'immatura morte del socio corrispondente Gaetano MINUNNI, avvenuta in Napoli il 7 corrente, e ne ricorda brevemente i meriti di cittadino, d'insegnante, di studioso.

Il presidente comunica i ringraziamenti del socio corrispondente SALVI, al quale l'Accademia espresse il proprio compiacimento per la nomina a Senatore del Regno.

Il socio D'ERASMO presenta, per gli Atti, una sua memoria dal titolo *Sopra alcuni avanzi di vertebrati fossili della Patagonia raccolti dal dott. E. Feruglio*. Con votazione unanime (astenuto il solo socio D'ERASMO) l'Accademia ne delibera la stampa, destinando la somma di L. 600 alle illustrazioni relative.

Il socio SCORZA presenta una nota del socio corrispondente CACCIOPPOLI *Sui teoremi d'esistenza di Riemann*, per l'inserzione nel Rendiconto.

Il socio MARCOLONGO presenta, pure per il Rendiconto, una nota del prof. Enrico LENZI *Sulla risoluzione numerica dell' equazione*

$\sum_{1}^{n} i x^i = k$. L'Accademia delibererà su questo lavoro nella prossima tornata.

In base all'avviso comunicato ai soci, si passa alla votazione per la nomina di un socio corrispondente nella sezione delle Scienze Matematiche e di un altro socio corrispondente in quella delle Scienze Naturali. I proff. MARCOLONGO e D'ERASMO, nella loro qualità di relatori delle predette sezioni, leggono i rapporti motivati di queste, che propongono rispettivamente al suffragio dell' Accademia i nomi del prof. Luigi CARNERA, direttore dell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte, e del prof. Carmelo COLAMONICO, ordinario di Geografia nella R. Università di Napoli. Non avendo alcun socio chiesto la parola per fare ulteriore proposte, si passa alla votazione, che dà il risultato seguente: soci ordinari presenti e votanti, 13; prof. Luigi CARNERA, voti 13; prof. Carmelo COLAMONICO, voti 13. Il Presidente proclama eletti i due professori predetti soci corrispondenti rispettivamente nella sezione di Scienze matematiche ed in quella di Scienze Naturali.

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 aprile 1934 - XII

Assistono all' adunanza, presieduta dal Vice-presidente prof. G. SCORZA, i soci ordinari DE LORENZO, DEL PEZZO, DIAMARE, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, ed i soci corrispondenti CARNERA, NOBILE, ANDREOLI, CARRELLI. Fa da segretario il socio PIERANTONI invece del socio D'ERASMO, assente da Napoli. Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza del 10 marzo, che è approvato, e comunica la lettera del prof. CARNERA, che ringrazia l'Accademia per la nomina a socio corrispondente.

Il segretario comunica l'invito della Edinburgh Geological Society di partecipare alla celebrazione del suo centenario nei giorni 3 e 4 settembre 1934, inviato alla Società Reale. L' Accademia delibera di scrivere al Presidente della Società di Edinburgo perché voglia rappresentare la Società Reale e specialmente l'Accademia.

Su proposta del socio MARCOLONGO l' Accademia delibera, a voti unanimi, l' inserzione nel Rendiconto della nota, presentata nella precedente adunanza, del prof. Enrico LENZI, *Sulla risoluzione numerica dell'equazione* $\sum_{1}^{n} i x^i = k$.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta una nota del Dr. G. DE MEO, *Su alcuni indici atti a misurare l'attrazione matrimoniale*

in classificazioni dicotome, ed un' altra del Dr. G. Barba, *Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva.*

Il socio Scorza presenta una nota del Dr. M. Giovanardi, *Sulla prospettiva della superficie di rotazione.*

Il socio Marcolongo presenta pel Rendiconto la nota del Prof. Enrico Lenzi, *Ancora sulla risoluzione numerica dell' equazione* $\sum_1^n i\, x^i = k.$

Lo stesso socio Marcolongo presenta per gli Atti una sua memoria dal titolo: *Il trattato di Leonardo da Vinci sulle trasformazioni dei solidi nel 1° dei Codicetti Forster.* Con votazione unanime (astenuto il solo socio Marcolongo) se ne approva l'inserzione negli Atti, fissando la spesa di lire cinquecento per l'esecuzione delle figure.

Processo verbale dell' adunanza del dì 14 aprile 1934 - XII

Assistono all'adunanza, presieduta dal prof. Giuseppe De Lorenzo, i soci ordinarii del Pezzo, Diamare, Longo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, e i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Nobile.

Fa da segretario il socio Pierantoni, in sostituzione del socio D'Erasmo, assente da Napoli.

Il segretario ff. legge il processo verbale dell' adunanza del 7 aprile u. s., che è approvato. Comunica poi una lettera del Ministero delle Finanze, Archivio Bibliografico, che chiede tutte le pubblicazioni arretrate dell'Accademia. L'Accademia delibera d'inviare tutto quello che è disponibile, dichiarandosi onorata della richiesta, e dichiarando di non poter inviare perchè esauriti i volumi di cui vi siano pochissime copie.

Il socio Longo presenta all'Accademia il Tomo XII del *Bullettino dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli* e la relazione per l'anno 1933 sulla Stazione Sperimentale per le Piante Officinali, ed illustra il contenuto delle due pubblicazioni. Il Presidente ringrazia il socio Longo in nome dell'Accademia compiacendosi con lui.

Si vota per la inserzione nel Rendiconto delle seguenti note presentate nella seduta precedente: De Meo Dr. G., *Su alcuni indici atti a misurare l'attrazione matrimoniale in classificazioni dicotome*, presentata dal socio Andreoli; Barba dr. G., *Ancora sulla definizione di lunghezza di una curva*, presentata dallo stesso socio; Prof. E. Lenzi, *Ancora sulla risoluzione numerica dell'equazione* $\sum_1^n i\, x^i = k,$

presentata dal socio Marcolongo, ed infine Giovanardi Dr. M., *Sulla prospettiva delle superficie di rotazione.* Sono tutte approvate all'unanimità.

Il socio corrispondente Andreoli presenta per gli Atti la sua memoria dal titolo *Sulle funzioni di composizione di matrici (funzioni isogene).* All'unanimità ne viene approvata la stampa.

Lo stesso socio presenta per il Rendiconto la sua nota: *Sull'analisi dei fenomeni ciclici.*

Il socio corrispondente Andreoli presenta ancora pel Rendiconto la nota Barba G., *Minimum di condizioni per un funzionale — lunghezza di curva.* Sarà votata per l'inserzione nella prossima seduta.

Processo verbale dell'adunanza del dì 5 maggio 1934 - XII

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo, Diamare, Giordani, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, e i soci corrispondenti Andreoli, Carnera, Colamonico.

Funziona da presidente S. E. Giordani, e da segretario il socio D'Erasmo.

Aprendo la seduta, il presidente comunica che S. E. il Ministro dell'Educazione Nazionale, avvalendosi delle norme contenute nel R. D. Legge 21 sett. 1933, n. 1333, relativo alla revisione degli Statuti e Regolamenti degli Enti culturali, ha sciolto il Consiglio Generale della Società Reale di Napoli e gli Uffici di Presidenza delle tre Accademie, nominando un Commissario straordinario in persona dell'On. Senatore prof. Giunio Salvi. Poichè questi ha pregato il presidente di proseguire, secondo le norme consuetudinarie, i lavori accademici, il presidente è sicuro d'interpretare l'unanime sentimento dei colleghi inviando al Commissario Straordinario un saluto da parte dei soci tutti, i quali designandolo nello scorso Marzo quale candidato al Parlamento Nazionale già hanno dimostrato l'alta stima che hanno dell'opera di lui.

Dà indi la parola al segretario, il quale, letto il processo verbale dell'adunanza 14 aprile 1934, che viene approvato, comunica i ringraziamenti del prof. Colamonico per la nomina a socio corrispondente nella sezione delle Scienze Naturali.

L'Accademia accoglie a voti unanimi l'inserzione nel Rendiconto della nota del Dott. G. Barba, *Minimum di condizioni per un funzionale — lunghezza di curva*, presentata nella precedente adunanza.

Il socio senatore del Pezzo presenta, per il Rendiconto, una sua nota *Sull'esagono completo nel quattrospazio.*

La socia Bakunin legge la *Commemorazione del socio corrispondente Gaetano Minunni,* da stamparsi nel Rendiconto insieme con l'elenco delle pubblicazioni.

Processo verbale dell' adunanza del dì 12 maggio 1934 - XII

Partecipano all' adunanza i soci ordinari residenti Bakunin, Bottazzi, De Lorenzo, del Pezzo, D' Erasmo, Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini, e i soci corrispondenti Carrelli, Colosi, Rizzo, Andreoli, Nobile e Ricci.

Funziona da Presidente S. E. Giordani e da segretario il socio D' Erasmo.

Il Segretario dà lettura del processo verbale della tornata 5 maggio, che viene approvato. Indi comunica l' invito della R. Università di Catania alla celebrazione del V centenario che avrà luogo nel prossimo ottobre. L' Accademia aderisce, riserbandosi di nominare i propri rappresentanti.

Il socio Scorza presenta, per gli Atti, una memoria del prof. Nicolò Spampinato *Sulla geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 ipercomplesso.* Il presidente nomina la Commissione composta dai soci del Pezzo, Marcolongo e Scorza con l' incarico di riferire in una prossima adunanza.

Processo verbale dell' adunanza del dì 19 maggio 1934 - XII.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D' Erasmo, Diamare, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini ed i soci corrispondenti Carrelli e Ricci.

Funziona da presidente il sen. del Pezzo e da segretario il socio D' Erasmo.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 12 maggio 1934, che viene approvato, e comunica l' invito del Comitato Nazionale per le onoranze ad Antonio Pacinotti a partecipare alla cerimonia celebrativa del 24 maggio in Pisa. L' Accademia aderisce, delegando a rappresentarla il socio Carrelli.

Il socio Scorza, in nome proprio e dei colleghi del Pezzo e Marcolongo, legge la relazione sulla memoria M. Spampinato, *Sulla*

geometria dello spazio rigato considerato come un S_1 *ipercomplesso* proponendone l'accoglimento nel vol. XX degli Atti. Con votazione unanime l'Accademia accoglie tale proposta.

Il socio PASCAL Ernesto presenta, per gli Atti, una memoria del dott. COLUCCI *Sopra i polinomi definiti*. Il presidente nomina la Commissione composta dai soci PASCAL, MASONI e SCORZA perchè riferisca in una prossima adunanza.

Il socio D'ERASMO presenta, per il Rendiconto, una nota I[a] del prof. Francesco PENTA, *Sull' affioramento della roccia detta « diabasica » in territorio di Frigento (prov. di Avellino).* L'Accademia delibererà nella prossima tornata.

Processo verbale dell' adunanza del dì 9 giugno 1934 - XII.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti BAKUNIN, DE LORENZO, DEL PEZZO, D'ERASMO, DIAMARE, GIORDANI, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, SCORZA, SIGNORINI e i soci corrispondenti ANDREOLI, CARRELLI, COLAMONICO, RICCI e RIZZO.

Funziona da presidente S. E. GIORDANI e da segretario D'ERASMO.

Il Segretario legge il processo verbale dell'adunanza 19 maggio, che è approvato. Indi comunica l'invito della R. Università di Pavia alle onoranze alla memoria di Torquato TARAMELLI, e il telegramma di adesione inviato. Partecipa poscia che al concorso al premio accademico scaduto addì 31 maggio scorso sul tema : *Contributo agli studi di cinetica chimica,* è stato presentato un solo lavoro manoscritto dal titolo: *La decomposizione catalittica della nitrammide,* contraddistinto dal motto *Provando e riprovando.* Esso viene consegnato al socio anziano della sezione, prof. DE LORENZO, per l'ulteriore esame da parte di questa.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio, è segnalato il volume del socio corrispondente BRUNELLI sulle *Macchine a vapore.* L'Accademia ringrazia.

La commissione PASCAL, MASONI e SCORZA, incaricata di riferire sopra la memoria del dott. A. COLUCCI *Sopra i polinomi definiti,* ne propone la stampa nel vol. XX degli Atti. Con votazione unanime l'Accademia accoglie tale proposta.

A voti unanimi viene pure accolta l'inserzione nel Rendiconto della nota I del prof. Fr. PENTA *Sull' affioramento della roccia detta « diabasica » in territorio di Frigento (prov. di Avellino).*

Il socio D'ERASMO presenta, per il Rendiconto, una nota II del

prof. Penta sul medesimo argomento, ed inoltre una nota, dello stesso autore, dal titolo *Osservazioni petrografiche sulle Quarzodioriti di Nicotera, Palmi, Seminara e Bagnara.*

Il socio Scorza presenta una nota dell'ing. Mario Giovanardi *Sulla prospettiva lineare conica di figure piane.* Su queste tre note l'Accademia deciderà nella prossima adunanza.

Il socio Scorza presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo *Le algebre nei corpi finiti dotate di modulo e commutative.*

Il socio Marcolongo ricorda che nel vol. XX dell'Enciclopedia Italiana è comparso un articolo su Leonardo da Vinci, dovuto alla collaborazione di vari studiosi, il quale è stato recentemente pubblicato anche in fascicolo separato, che egli presenta, illustra e offre in dono all'Accademia. Il Presidente a nome dei soci ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 16 giugno 1934 - XII.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, D'Erasmo, Diamare, Giordani, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini e i soci corrispondenti Andreoli, Ricci e Rizzo.

Fa da presidente S. E. Giordani e da segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 9 giugno, che viene approvato. Indi comunica che al concorso al premio Sementini, con scadenza 16 giugno, hanno partecipato il prof. Carmelo Campisi con 4 lavori a stampa *(La rancidità dell'olio di oliva, La concimazione organica dell'olio, Studio critico sulla determinazione dell'indice termico degli olii, Nuovi orientamenti dell'olivicoltura in rapporto all'energia raggiante)* pubblicati negli anni 1933 e 1934, e la dott. Teresa Maresca con una memoria manoscritta dal titolo: *Ricerche sulla preparazione dell'acido fosforico.*

L'Accademia affida alla Commissione composta dei soci Bakunin, Giordani e Quercigh il mandato di esaminare i suddetti lavori e riferirle il giudizio in una delle tornate del mese di novembre.

Si approvano all'unanimità le note seguenti, presentate nella precedente adunanza: Penta Fr., *Sull'affioramento della roccia detta «diabasica» in territorio di Frigento*, nota II; Penta Fr., *Osservazioni petrografiche sulle quarzo-dioriti di Nicotera, Palmi, Seminara e Bagnara;* Giovanardi Mario, *Sulla prospettiva lineare conica di figure piane.*

Il socio D'Erasmo presenta, per il Rendiconto, una sua nota sopra *Il bradisismo di Paestum.*

Il socio Scorza presenta, per lo stesso periodico, una nota *Sulla riduzione a forma canonica di una classe speciale di matrici.*

La socia Bakunin presenta, pel Rendiconto, una nota della dott. Silvia Restaino dal titolo: *Contributo allo studio chimico di una roccia della Punta delle Pietre Nere* (*Foggia*). L'Accademia con votazione unanime approva.

INDICE

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI

RENDICONTO

DELL' ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

(CLASSE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI)

SERIE IV. — VOL. IV. — (Anno LXXIII)

Fascicoli 7 a 12 - Luglio a Dicembre 1934 (XII - XIII)

NAPOLI

S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FIS. E MATEM.

S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2

1935-XIII

Pubblicato il 31 Gennaio 1935 - XIII

Sulle involuzioni piane e sul numero di Caporali

Nota del socio ordinario **Pasquale del Pezzo**

[pervenuta all'Accademia il dì 2 luglio 1934 - XII]

Sunto. — Si addita una definizione nel cinquespazio delle involuzioni piane di coppie di punti e di un numero, che si chiama la raccolta, nonchè della classe di Caporali; si additano costruzioni per le involuzioni di Bertini e si pongono interrogativi per altre ricerche.

1. *a)* Nel cinquespazio **H** delle coniche φ inviluppi in un piano ω sia **M** la quattrovarietà del terz'ordine delle φ spezzate in coppie di punti, e sia **F** la superficie del quart'ordine delle φ ridotte ad un punto doppio [1]).

La **F** è doppia per la **M**.

La **M** possiede due sistemi di piani, cioè i γ delle coppie di punti in ω con un punto fisso C, ed i δ delle coppie giacenti su una retta *d* in ω. Ai γ sono riferiti biunivocamente i C, mentre ai δ le *d*.

b) Per un punto generico M di **M** passano due γ ed un solo δ. Per un punto N della **F** passano un solo γ ed infiniti δ.

Due γ generici hanno un punto unico comune fuori della **F**, e se si incontrino sulla **F** coincidono.

Due γ generici concorrono in un punto della **F** e se abbiano un altro punto comune coincidono.

Un γ ed un δ generici non hanno punti comuni, ma se ne abbiano uno ne avranno infiniti in una retta $e \equiv \gamma\delta$. Le rette *e* sono in ω punti C associati con tutti gli altri di una *d* uscente da C.

Le coppie di una involuzione non degenere sulla *d* immaginano una retta *g* generica su δ.

Un punto C di ω dato associato con tutti quelli di una generica retta *d* immaginano una retta *h* generica su γ. Se C e *d* si appartengano, la *h* si appoggia alla **F**.

2. *a)* Un quattrospazio generico **S** di **H** sega la **M** nella sezione spaziale $\mathbf{M}_1$ che è una trevarietà di terz'ordine con una curva doppia di quart'ordine $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{SF}$.

b) Lo **S** sega ogni γ in una retta *h*, stabilisce così una corrispondenza **P** biunivoca tra γ ed *h*, cioè, in ω, tra C e la *d*. La $\mathbf{F}_1$ è in ω una conica φ_1 e la **P** è la polarità rispetto alla φ_1.

---

[1]) Segre — *Considerazioni intorno alla geometria delle coniche.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. XIX.

c) Lo **S** sega ogni δ in una g, dunque la coppie di punti reciproci nella polarità **P** sono in involuzione.

Se la **M** contenga una conica σ della **F**, in ω la φ_1 si spezza e la **P** degenera.

3. *a)* Un trespazio **T**, intersezione di due generici quattrospazi $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ in **H**, sega la **M** nella superficie $\mathbf{M}_2$ di terz'ordine con quattro punti doppi **TF**.

b) Lo spazio **T** segando ogni γ in un punto C′ stabilisce una involuzione biunivoca tra C e C′, con quattro punti doppi **TF**, cioè in ω una involuzione **J** con quattro punti doppi che sono le basi di un fascio di coniche, la notissima **J** di punti reciproci rispetto ad un fascio.

c) Lo spazio **T** sega ogni δ in un punto unico fuori della **F**, dunque *la classe* della **J** è uno.

d) Si dirà che la **J** è l'*intersezione* di due polarità, cioè la *base*, il *sostegno*, di un fascio di polarità.

4. *a)* Quando **T** contenga una conica σ della **F**, la **J** riducesi ad una omologia armonica **U** di asse u, immagine della σ, e di centro U, immagine dell'unico punto comune alla **F** ed a **T** fuori della σ.

b) Contenendo **T** la σ non incontra in punti fuori della **F** niun piano δ, onde *la classe* della **U** è zero.

c) Sotto questo aspetto un'omologia armonica in ω rientra come caso particolare nella involuzione **J**.

5. *a)* Una trevarietà **N** dell'ordine n, generica in **H**, sega la **M** secondo una superficie $\mathbf{N}_2$ dell'ordine $3n$, la quale sega ogni γ, come pure ogni δ, in n punti e la **F** in $4n$ punti.

b) La superficie $\mathbf{N}_2$ segando un dato γ in n punti $C'_1, \ldots. C'_n$ istituisce la corrispondenza involutoria nella quale a C corrispondono gli n punti C′ ciascuno facendo coppia con C ed a ciascuno dei C′ corrispondono n punti C″ dei quali *uno* è C. Il punto C *raccoglie* intorno a sè altri n punti C′ con ciascuno dei quali fa coppia.

c) Ora se la **N** si trovi in particolari posizioni rispetto alla **M**, p. e, che contenga dei piani γ, ovvero che contenga **F**, ovvero che in altri modi la $\mathbf{N}_2$ si spezzi in fattori, uno **K** di cotesti fattori può essere una superficie di ordine $k < 3n$, che seghi ogni generico γ in $\mu \lesseqgtr n$ punti ed ogni δ generico in $\nu \lesseqgtr n$ punti, segando la **F** in curve ed in punti isolati.

Cotesta **K** definisce, come dianzi, una involuzione di coppie, in **M** ed in ω, nella quale un punto C *raccoglie* intorno a sè altri μ punti C′ con ciascuno dei quali fa coppia, cioè una involuzione di *raccolta* μ e di classe ν.

Le note involuzioni di Bertini, le cremoniane involutorie [1]), dove ciascun punto appartiene ad una sola coppia, si hanno per $\mu = 1$, e ciascuna ha una classe ν conforme alla definizione di Caporali [2]).

d) Se la **K** seghi la **F** secondo una curva, che dev'essere di un ordine pari 2β, perchè sulla **F** non vi giacciono curve di ordine dispari, sarà $\nu + \beta$ il numero totale degli incontri di **K** con uno generico piano δ.

6. *a)* Sia la **N** un cono razionale di ordine n dotato di un piano $\gamma \equiv \gamma_1$ multiplo secondo $n - 1$. Esso **N** sega ogni altro γ in un punto unico variabile al variàre del γ. Dalla superficie $\mathbf{N}_2$ si distacca γ_1 $n - 1$ volte e la residua **K**, dell'ordine $3n - n + 1 = 2n + 1 = k$, si appoggia a ciascun γ generico in un punto solo, onde $\mu = 1$, a ciascun δ generico in $\nu = n$ punti.

È definita così in ω una involuzione **U** del tipo Jonquières.

b) Sia la **N** una trevarietà in **H**, del quarto, o quinto, ecc., ordine dotata di piani ρ e capace di contenere la **F**. Sia p. e. quella **N** rappresentata nel trespazio dalle quadriche con quattro punti fissi, che sta nel cinquespazio, è di quart'ordine e possiede piani ρ. Si domanda se niuno o alcuni ρ cadano su dei γ e se la **N** contenga la **F**, quali involuzioni verranno definite in ω, e ciascuna di quale raccolta e classe?

LE ALGEBRE DEL 3.° ORDINE

Memoria del socio ordinario **G. Scorza**

(presentata nell'adunanza del dì 3 novembre 1934 - XIII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — Oggetto di questa Memoria è la classificazione delle algebre del 3.° ordine, senza fare alcuna ipotesi restrittiva sul corpo nel quale esse si intendono definite.

---

[1]) BERTINI — *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano.* Ann. di Mat., Serie 2ª, Tomo 8°.

[2]) CAPORALI — *Sulle trasformazioni univoche piane involutorie.* Rend. R. Acc. Sc. Fis. e Mat. di Napoli, 1879. PELLERANO, *Memorie di Geometria,* 1888.

Indici di attrazione, di selezione, di omogamia nei fenomeni statistici

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 novembre 1934 - XIII)

Sunto. — L'A. partendo da sue precedenti ricerche (applicate all'attrazione matrimoniali dal dott. De Meo) sviluppa la distinzione fra omogamia ed attrazione: la prima che considera soltanto individui di II ordine già formati; la seconda invece che li considera in relazione alla collettività degli individui di I ordine in seno alla quale essi si formano.

1. In alcune Note precedenti (vedi Bibliog. in fondo) ci siamo occupati dello studio di alcuni fenomeni statistici, dei quali uno dei più cospicui esempi è senza dubbio il fenomeno matrimoniale considerato nel suo aspetto di attrazione fra individui appartenenti a gruppi diversi. Il dott. G. De Meo in questi Rendic. ne ha sviluppata l'applicazione all'attrazione matrimoniale fra vedovi e celibi da una parte, vedove e nubili dall'altra.

Nelle anzidette Note veniva presa in esame soltanto la collettività formata dalle coppie già costituite: ed è perciò che abbiamo ivi parlato solo di omogamia. Ci siamo cioè fermati ad una statistica di individui di ordine superiore (coppie unite in matrimonio) segnalando indici atti a porre in evidenza il diverso comportamento di varie di queste collettività, una volta che si fossero formate. Ed è ovvio che in tal modo si viene a prescindere dalla collettività degli individui di primo ordine in seno alla quale si formano gli individui di secondo ordine (coppie); e si tralascia di considerare la sua costituzione e la conseguente possibilità che in essa vi è di formazione di coppie dei vari tipi in esame. Tipi che dipendono dalla presenza di un carattere per uno, e di un carattere per l'altro degli elementi costitutivi della coppia in esame.

Pertanto gli indici di omogamia, etc., ivi introdotti, non dànno (appunto perchè non è stata presa in esame la collettività di partenza) nessuna indicazione sull'attrazione e sulla selezione che giuocano nella detta collettività di primo ordine per formare quella di secondo.

Potrebbe dunque accadere che due collettività di secondo ordine si presentino identiche, senza che ciò si verifichi per quelle di primo ordine da cui esse sono tratte; e chè quindi le coppie abbiano eguale omogamia senza che ciò derivi affatto da eguali cause selettive ed attrattive agenti nelle originarie collettività di primo ordine.

In questa breve Nota ci proponiamo appunto di segnalare indici atti a porre in luce tale attrazione: a seguire cioè il modo col quale individui di primo ordine danno origine a quelli di secondo.

Si intende che su questa traccia potranno venire presi in esame fatti statistici via via più complessi, nei quali sieno in presenza individui di diversi ordini che si allegano a formarne ancora altri (ad esempio famiglie; società per azioni; comunità etc. etc.).

Nello svolgimento seguiremo l'esempio della scelta matrimoniale, in divisione dicotomica: e come illustrazione del procedimento rinviamo al lavoro del dott. G. De Meo (vedi Bibl. N. 8).

2. Sia dunque assegnata una collettività (P) costituita da due tipi di elementi (individui) formanti ciascuno una collettività (M) ed (F) rispettivamente *).

La (M), in base ad un certo carattere, sia suddivisa in altre due (M_1) e (M_2); ed (F) analogamente in (F_1), (F_2), sia in base allo stesso che ad un altro carattere, con la convenzione che al carattere di (M_1) corrisponda quello di (F_1); di (M_2) quello di (F_2).

È evidente che calcoli diversi si presentano secondo che ogni (M) sia anche un (F), (M) ed (F) non disgiunti cioè; oppure che ciò avvenga solo per una particolare classe ovvero che avvenga solo con una certa probabilità; ovvero infine che *ciò non possa mai avvenire* (i caratteri « allelomorfi » di Mendel, caratteri disgiuntivi); e che contingenze analoghe si presentano fra (M_1) ed (M_2); (F_1) ed (F_2).

Noi ci manterremo, in questa Nota, *nell'ultima ipotesi, di carattere disgiuntivo: quindi un elemento (P) è un (M) o un (F); e così via* per (M_1), (M_2); (F_1), (F_2).

In seno a questa collettività di primo ordine, si siano prodotti aggruppamenti di due individui: un (M) ed un (F), costituenti un individuo di secondo ordine (coppia matrimoniale). L'insieme di questi formerà una collettività (C_1); essa in base ai caratteri disgiuntivi dei suoi componenti si scinde in quattro collettività parziali, anch'esse disgiunte: cioè (C_{11}), formata da un (M_1) e da un (F_1), e così via. Si suppone qui che il carattere originario degli (M), (F) si conservi e non si attenui, sparisca o modifichi nella formazione della coppia.

A formare (C_{rs}) concorrono dunque (M_{rs}) ed (F_{rs}) in egual numero $C_{rs} = M_{rs} = F_{rs}$; poniamo

$$C_{11} + C_{12} = M'_1 \quad ; \quad C_{21} + C_{22} = M'_2$$
$$C_{11} + C_{21} = F'_1 \quad ; \quad C_{12} + C_{22} = F'_2$$

*) I simboli in parentesi indicano le collettività; fuori parentesi il numero degli individui che le costituiscono. Le lettere greche invece indicano le quantità analoghe, ma ridotte a masse unitarie.

il che resta giustificato dalle eguaglianze ora scritte; in quanto M'_1 rappresenta proprio il numero degli (M_1) che concorrono a formar C_1 con un (F_1) o un (F_2) e così via. È ovvio che $P' = 2M' = 2F'$.

3. Si presentano subito e spontanei alcuni indici.

Anzitutto il rapporto $\frac{M-F}{M+F} = \mu - \varphi$ che ci dà la prevalenza degli (M) sugli (F) se positivo o degli (F) sugli (M) se negativo.

Se esso è nullo, ci dirà che M ed F sono eguali, e che quindi — astrattamente — ogni M si può combinare con un F a formare una coppia, senza che restino elementi non coniugabili; se invece è eguale a $+1$ ci dirà che (P) è costituito *soltanto* da (M) o da (F) e che coppie non se ne possono formare.

Esso dunque è *sostanzialmente un indice di chiusura,* che dà nella (P) le proporzioni rispettive del gruppo chiuso e del gruppo aperto (nel senso di BENINI) che la compongono.

Si presenta poi un'altra coppia di indici che si potrebbero chiamare *indici* di *selezione.* Osserviamo che vi sono in (P) M_1 e M_2 su M: rappresentando queste come masse agli estremi di un segmento unitario, il baricentro si troverà spostato dal punto medio di $\frac{M_1-M_2}{M_1+M_2} = \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu}$; ed analogamente per F si avrà $\frac{F_1-F_2}{F_1+F_2} = \frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi}$.

Questa trasformazione è analoga alla precedente. Ma anche nella (C_1), e quindi nelle M'_1 M'_2 si può fare analoga considerazione. Dunque converrà considerare le differenze

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\mu'_1-\mu'_2}{\mu'_1+\mu'_2} - \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right\} = \frac{1}{2}\left((\mu'_1-\mu'_2) - \frac{\mu_1-\mu_2}{\mu}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\varphi'_1-\varphi'_2}{\varphi'_1+\varphi'_2} - \frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi'_1+\varphi_2}\right\} = \; = \frac{1}{2}\left((\varphi'_1-\varphi'_2) - \frac{\varphi_1-\varphi_2}{\varphi}\right).$$

L'annullarsi di uno di questi indici ci dice che in (C'_1) si verifica per (M') e (F'), la stessa distribuzione che per (M) o (F) in (P); mentre se invece si avvicina all'unità, in modulo, i rapporti tendono ad invertirsi: cioè in (C_1) prevalgono gli (M'_1) sugli (M'_2) mentre in (P) avviene il contrario.

Pertanto tale coppia di indici è effettivamente atta ad esprimere la selezione che avviene negli (M) o negli (F) per il fatto di riunirsi a formare un (C_1).

4. Passiamo infine all'indice di *attrazione* ed a quello di *concentrazione.*

Da P — che evidentemente è in generale somma di un gruppo aperto e di uno chiuso — estragghiamo un gruppo aperto con la con-

dizione che in esso gli (M_1) ed (M_2) si trovino nelle stesse proporzioni che in P; e che lo stesso si faccia per (F_1) ed (F_2); avendosi così (M_1^*); (M_2^*); (F_1^*); (F_2^*); (P^*).

Se in tale gruppo avesse libero giuoco soltanto il caso, e non vi fossero nè fenomeni di attrazione, nè fenomeni di concentrazione, otterremmo una collettività C^* di cui il quadro di distribuzione (che chiameremo *spontanea*) sarebbe:

C^*_{11}	C^*_{12}	$C^*_{11} + C^*_{12} = M^*_1$
C^*_{21}	C^*_{22}	$C^*_{21} + C^*_{22} = M^*_2$
$C^*_{11} + C^*_{21} = F^*_1$	$C^*_{12} + C^*_{22} = F^*_2$	C^*

$$M^*_1 + M^*_2 = = F^*_1 + F^*_2 = = C^*$$

ove sia $C^*_{rs} = \frac{M_r^* F_s^*}{C^*} = \frac{M_r F_s}{C^2} \cdot C^*$ per la indicata proporzionalità fra M, M_1, M_2 ed $M^* = C^*$, M_1^*, M_2^* etc.

Dunque, seguendo la traccia delle già citate Note, conviene prendere in esame tre distribuzioni: quella *effettiva;* quella *casuale;* quella *spontanea* (qui introdotta in luogo della indifferente ivi considerata),

Tali distribuzioni, ridotte all' unità, dànno luogo rispettivamente ai quadri

I. *Effettiva* (o rilevato)

γ'_{11}	γ'_{12}	μ'_1
γ'_{21}	γ'_{22}	μ'_2
φ'_1	φ'_2	1

$$\mu'_r = \gamma'_{r1} + \gamma'_{r2} \quad ; \quad \varphi'_s = \gamma'_{1s} + \gamma'_{2s}$$

II. *Casuale*

$\overline{\gamma}_{11}$	$\overline{\gamma}_{12}$	μ'_1
$\overline{\gamma}_{21}$	$\overline{\gamma}_{22}$	μ'_2
φ'_1	φ'_2	1

$$\overline{\gamma}_{rs} = \mu'_r \, \varphi'_s$$

III. *Spontanea*

γ^*_{11}	γ^*_{12}	$\frac{\mu_1}{\mu}$
γ^*_{21}	γ^*_{22}	$\frac{\mu_2}{\mu}$
$\frac{\varphi_1}{\varphi}$	$\frac{\varphi_2}{\varphi}$	1

$$\gamma^*_{rs} = \frac{\mu_r \, \varphi_s}{\mu\varphi}$$

ove $\mu'_r = \frac{M'_r}{M'}$, calcolato dagli (M') che compaiono in C, mentre $\mu_r = \frac{M_r}{P}$, $\mu = \frac{M_1 + M_2}{P}$ ed analogamente.

Se ricordiamo l'operazione D delle precedenti Note, che consiste nel sommare gli elementi con coppie di indici eguali e sottrarre da essa la somma degli altri due, e se ricordiamo che l'indice di omogamia era ottenuto dal confronto per differenza di tali risultati, sorge spontanea la definizione dell'indice di *attrazione*: la differenza fra i due risultati dell'operazione D applicata alla tabella rilevata ed a quella spontanea.

Similmente, la *concentrazione* risulterà dal confronto fra tabella casuale e quella spontanea; mentre infine lo sfasamento (vedi Note citate) fra seconda e prima.

In formole si avrà per l'*attrazione*:

$$\begin{aligned}\tau &= (\gamma^*_{11} + \gamma^*_{22} - \gamma^*_{12} - \gamma^*_{21}) - (\gamma'_{11} + \gamma'_{22} - \gamma'_{12} - \gamma'_{21}) \\ &= \frac{1}{\mu\varphi}(\mu_1 - \mu_2)(\varphi_1 - \varphi_2) - (\gamma'_{11} + \gamma'_{12} - \gamma'_{12} - \gamma'_{22});\end{aligned}$$

per la *concentrazione*, invece:

$$\begin{aligned}\chi &= (\gamma^*_{11} + \gamma^*_{22} - \gamma^*_{12} - \gamma^*_{21}) - (\bar{\gamma}_{11} + \bar{\gamma}_{22} - \bar{\gamma}_{12} - \bar{\gamma}_{21}) \\ &= \frac{1}{\mu\varphi}(\mu_1 - \mu_2)(\varphi_1 - \varphi_2) - (\mu'_1 - \mu'_2)(\varphi'_1 - \varphi'_2)\end{aligned}$$

E tenuto presente l'indice σ di sfasamento, come già definito, si ha:

$$\tau = \chi + \sigma .$$

5. Riassumendo:

I. Allorchè dallo studio dell'omogamia si vuol passare a quello dell'attrazione, bisogna considerare la collettività nel cui seno si forma quella delle coppie.

II. Un primo gruppo di indici si riferisce esclusivamente alla distribuzione degli (M), (F) in (P) ed in (C); e precisamente:

a) *indice di chiusura* $\frac{M-E}{P} = \mu - \varphi$, in (P);

b) *indici di selezione* (per M o F) fra (C) e (P):

$$\frac{1}{2}\left(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}^2 - \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\varphi}\right).$$

III. Un secondo gruppo di indici si riferisce invece all'attrazione e precisamente:

c) *indice di sfasamento*, σ, derivato dal confronto fra tabella rilevata e tabella casuale;

d) *indice di concentrazione*, χ, ottenuto fra tabella casuale e tabella spontanea;

e) *indice di attrazione*, τ, fra tabella rilevata e tabella spontanea, che è somma dei primi due.

BIBLIOGRAFIA

1. R. Benini — *Principî di demografia* (Firenze, 1901).
2. F. Savorgnan — *La scelta matrimoniale* (Biblioteca del « Metron », 1924).
3. » » — *La misura dell' endogamia e dell' omogamia.* (Atti del Comitato Italiano per i problemi della popolazione, 1931).
4. C. Gini — *Indici di omofilia e di rassomiglianza etc.* (Atti R. Ist. Ven., 1914-15, T. LXXIV).
5. G. Andreoli — *Sulla definizione di certi indici etc.* (Rend. R. Acc. Sc. Napoli 1934, S. IV, Vol. IV).
6. » » — *Sugl' indici di omogamia pura ed attenuata etc.* (Ibid.).
7. G. de Meo — *Su alcuni indici atti a misurare l' attrazione matrimoniale in classificazioni dicotome.* (Ibid.).
8. » » — *Variazioni dell' attrazione matrimoniale in Italia per alcuni caratteri degli sposi.* (in corso di pubblicazione).

SUI NUMERI COMPLESSI E SU CERTI GRUPPI DI TRASFORMAZIONI QUADRATICHE.

Nota del dott. **Giorgio Barba**

(Adunanza del dì 17 novembre 1934 - XIII)

Sunto. — L'A. ricollega certi gruppi di trasformazioni quadratiche ad un particolare tipo di numero complesso atti a rappresentare punti del piano: le dette trasformazioni si presentano allora come trasformazioni lineari fratte in questa variabile complessa. Si delinea così lo sviluppo delle inversioni per raggi vettori reciproci collegate agli ordinari numeri complessi.

1) È notissimo che le inversioni per raggi vettori reciproci nel piano, si possono collegare alle sostituzioni lineari fratte, eseguite sulla variabile complessa, la cui affissa rappresenta i punti del piano stesso.

Si ha che le affinità circolari di MÖBIUS, cioè sostituzioni quadratiche nelle coordinate di un punto del piano, diventano (con l'introduzione della variabile complessa) la semplice trasformazione omografica.

Quindi, tali trasformazioni formano gruppo, e dal punto di vista geometrico esse sono caratterizzate dal fatto di considerare gli ∞^2 sistemi lineari di cerchi (reti) passanti per un punto generico del piano.

D'altro lato le trasformazioni lineari fratte sulla variabile complessa operano su questa, per la quale il modulo è dato dalla forma $\sqrt{x^2+y^2}$. cioè della forma tipica euclidea.

Sorge quindi spontanea la questione di vedere se esistano altri gruppi di trasformazioni quadratiche che godono di proprietà analoghe; di vedere inoltre in che modo esse si possono eventualmente connettere ad enti analoghi ai numeri complessi, così da ridurre tale gruppo a quelle trasformazioni omografiche sui detti numeri; ed infine quale sia l'elemento che va sostituito al modulo avente la già detta forma euclidea, nel caso studiato.

2) La risposta è immediata: ogni qualvolta si introduce una certa unità, tale che il suo quadrato sia una combinazione lineare di essa stessa e di una unità ordinaria, le trasformazioni lineari omografiche, operanti sui numeri complessi, che siano gli affissi di un punto di un piano, caratterizzano nelle coordinate del piano stesso,

delle trasformazioni quadratiche, aventi proprietà analoghe a quelle delle affinità circolari di MÖBIUS.

E precisamente queste trasformazioni quadratiche risulteranno collegate (come quelle ai cerchi) agli ∞^2 sistemi di reti di coniche passanti per due punti fissi del piano.

3) Naturalmente, il caso che più interessa, in contrapposto a quello dei cerchi, è quello delle iperboli equilatere: si viene in tal modo a sostituire al modulo, che esprime una distanza euclidea, un modulo che esprime una distanza del piano relativistico; si avranno in tal modo, anzichè trasformazioni collegate alle inversioni per raggi vettori reciproci, trasformazioni analoghe, ma collegate ad inversioni per raggi vettori reciproci del piano a metrica lorentziana.

Per fare ciò introduciamo una unità pseudo-immaginaria u, tale che $u^2 = 1$, e chiamiamo quantità pseudo-complessa un' espressione del tipo

$$a + ub$$

dove a e b siano reali. Sè si considerassero a e b come quantità complessa ordinaria, parleremmo di quantità ipercomplesse [1]).

4) Ovviamente, le regole del calcolo di tali numeri sono le seguenti:

Ad un numero u-complesso può darsi la forma:

$$a + ub = \rho\,(\mathrm{Ch}\,\omega - u\,\mathrm{Sh}\,\omega)$$

con

$$\rho = \sqrt{|a^2 - b^2|}\,.$$

La differenza sostanziale tra i due simboli $a + ib$ ed $a + ub$ è nel fatto che il primo ha affissa in un piano in cui vale la metrica euclidea; il secondo in un piano in cui vale la metrica iperbolica speciale.

Inoltre per gli *u-complessi* restano invariati due punti impropri reali e la rete di coniche passanti per essi, ossia le iperboli equilatere aventi per assintoti le bisettrici degli assi.

Notando le relazioni simboliche tra le varie regioni del piano determinante dagli assi e segnate con numeri romani:

$$(\mathrm{I})\,.\,u \equiv (\mathrm{II})\,;\,(\mathrm{I})\,.\,(-1) \equiv (\mathrm{III})\,;\,(\mathrm{I})\,.\,(-u) \equiv (\mathrm{IV})\,,$$

---

[1]) Se si adottasse la teoria delle algebre sarebbe certamente possibile sostituire ad *uno* e ad u altre due quantità; ma poichè a noi importa porre in rilievo la relazione con il piano della metrica lorentziana, conserviamo la forma da noi scelta e svilupperemo i nostri calcoli su tale forma.

possiamo individuare un qualsiasi u-complesso con la notazione:

$$\rho\,[k_r\,(Ch x + u\,Sh x)]$$

con x reale e $k_r = 1, u, -1, -u$.

Il prodotto di n u-complessi

$$(\rho_1 k_{r1}, x_1), \quad \ldots \quad (\rho_n k_{rn}, x_n)$$

è dato da:

$$(\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \cdot H_{r1, r2, \ldots rn}\ ,\quad x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

dove $H_{r1, r2, \ldots rn} = k_{r1} . k_{r2} \ldots . k_{rn}$.

Il valore di H ci dirà in quale regione è l'affissa del punto « prodotto ».

In particolare sussiste anche qui la formula di Moivre.

5) Nei riguardi dell'operazione di estrazione di radice, anche qui sarà $(\rho . k_\alpha, x)$ radice u-esima di (rR_β, y) se

$$(\rho k_\alpha, x)^n \equiv (r k_\beta, y)$$

risultando, pertanto:

$$\rho^n . k_\alpha^n = r . k_\beta \quad \text{e} \quad nx = y.$$

Consegue che se n è dispari l'u-complesso ha radici e soltanto nella propria regione; se n è pari l'u-complesso ha radici solo se la sua affissa cade nella prima regione.

Desiderando restare, in questa nota, nel campo u-complesso, ad argomento reale, nei riguardi delle radici di un u-complesso, dovremo escludere la periodicità pel Sh e pel Ch, ottenendo la formula:

$$\sqrt[n]{(r k_\beta, y)^{\frac{1}{n}}} = a^{\frac{1}{n}} k_\alpha \left[Ch \frac{y}{n} + u\, Sh \frac{y}{n} \right]$$

con $\beta = 1$, per n pari e $\beta = \alpha$ per n dispari.

In particolare, per la radice quadrata di un u-complesso generico si trova che, per punti interni alla I regione, si hanno quattro radici distinte (nelle altre regioni nessuna); per punti situati sulle due bisettrici, si hanno ancora quattro radici, ma a coppie coincidenti. Nel resto del piano, non esistono radici quadrate u-complesse di alcun punto.

6) Le trasformazioni di cui parlavamo all'inizio, sono precisam ente quelle lineari fratte operanti sulle quantità pseudo complesse,

e cioè:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}.$$

È troppo evidente che esse formano gruppo.

Se separiamo la parte reale dalla pseudo complessa, si vede attraverso le formule che ne risultano, che il sistema delle ∞^2 rette del piano si trasforma nella rete di iperboli equilatere passanti per i due punti all'infinito delle bisettrici e per un punto fisso; mentre in generale, il sistema delle ∞^3 iperboli equilatere passanti per quei tre punti impropri vengono trasformate in sè stesse.

Come elemento eccezionale di tali trasformazioni quadratiche vi è, al solito, la retta impropria che viene trasformata in un punto.

In una prossima Nota svolgeremo l'esame di tali sostituzioni, dal punte di vista dei poli e del loro numero, della loro riduzione a forma canonica e della loro classificazione.

Sulla geometria piana cayleyana e sulle metriche a forma quadratica indefinita

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 1.° dicembre 1934 - XIII).

Sunto. — L'A., richiamandosi ad una precedente Memoria esamina il diverso comportamento della geometria euclidea e di quella iperbolica speciale, che pur ammettono, ambedue, parallela unica; e delinea la opportunità di studiare gli spazi lineari a metrica indefinita per poter estendere e completare le idee di Riemann sui fondamenti della Geometria.

1. In una nostra precedente Memoria, inserita negli Atti della Accademia Gioenia di Catania (*Metriche Cayleyane* etc. Atti Accademia Gioenia, 1932) abbiamo studiato quali potessero essere le geometrie non euclidee, partendo dall' interpretazione di Cayley. Giungemmo alla conclnsione che, negando il postulato delle parallele, ciò si potesse ottenere o con l'ammissione di nessuna o di infinite parallele (geometria di Riemann o di Lobacewski) o — *come caso completamente nuovo* — affermando che vi fossero rette euclidee, rette riemanniane, rette lobacewskiane nello stesso piano.

Ma un altro lato della quistione è da porre in rilievo ed è quanto facciamo con la presente nota.

Si tratta fondamentalmente di ciò: a fianco della geometria euclidea, a metrica riemanniana (forma quadratica definita positiva che caratterizza la distanza) vi è nel piano una geometria — la iperbolica speciale della rèlatività — nella quale pur valendo il postulato di Euclide sulle parallele, cessa di essere valida la metrica riemanniana: la forma quadratica non è più definita.

La differenza sostanziale fra le due geometrie resta ricondotta allora ad una quistione sui gruppi.

Il gruppo di movimenti del piano euclideo, contiene dei sottogruppi ottenuti lasciando fermo un punto: si hanno i sottogruppi delle rotazioni attorno ad un punto arbitrario del piano, sottogruppi che sono periodici.

Nella geometria iperbolica speciale vi sono altresì gruppi di movimenti dello stesso tipo: ma tali gruppi cessano di essere periodici.

Dunque la differenza sostanziale fra le due geometrie consiste unicamente nel modo di comportarsi di un fascio di direzioni (spiccate da un punto) rispetto ai movimenti. Nel primo caso il fascio (considerando solo gli elementi reali) si sovrappone a sè stesso in modo da poter passare da una direzione ad un'altra qualunque; nel secondo ciò non avviene, restando spezzato il fascio in due parti separate dalle direzioni di lunghezza nulla.

2. Pertanto, ove si voglia poter estendere la metrica cayleyana ad uno spazio qualunque, occorre tener presente la differente natura ed il diverso comportamento di metriche a forma quadratica definita oppure a forma quadratica indefinita.

Se è dunque fissato uno spazio numerico di sostegno ad n dimensioni ed in questo è definita una iperquadrica che sia fondamentale per la metrica cayleyana, occorrerà definire la distanza (a meno di un fattore costante) come logaritmo del birapporto fra i due punti e quelli d'intersezione della loro congiungente con l'iperquadrica; e come angolo (a meno di un fattore costante) il logaritmo del rapporto fra le due rette e le tangenti, nel loro piano, alla iperquadrica fondamentale.

I movimenti sono, al solito, le iperomografie dello spazio numerico di sostegno che lasciano invariata la iperquadrica; e ad ogni punto è attaccato un sistema di ∞^1 ipersuperficie (luogo di *equidistanza*), fra le quali la iperquadrica fondamentale: ciascuno di tali sistemi trasformandosi nell' altro per movimenti che portano un punto-centro sull' altro; ed è altresì attaccata ad ogni iperpiano un sistema ∞^1 di ipersuperficie-inviluppo (*isocline*), degli iperpiani secanti quello dato sotto lo stesso angolo, con le stesse proprietà.

Naturalmente si avranno sottogruppi di movimenti, se si fissa che uno, due, . . . $(n - 1)$ punti debbano essere lasciati inalterati.

Se la metrica è riemanniana si avranno esclusivamente sottogruppi periodici; se la metrica è invece a forma quadratica indefinita si avranno anche gruppi di movimenti *non* periodici.

La periodicità o meno dipenderà dal numero di termini positivi e negativi presenti nella forma; ed in ultima analisi dal comportarsi della iperquadrica rispetto a tutti gli iperpiani passanti per i punti scelti (regione interna o regione esterna) come elementi reali e raggiungibili.

3. È pertanto ovvio che uno studio completo delle varietà aventi il gruppo di postulati di Euclide va subordinato allo studio fondamentale degli spazi a metrica data da forma quadratica a coefficienti unitari in valore assoluto; cioè a fianco degli ordinari spazi cartesiani, occorre studiare quelli nei quali la distanza di due punti sia data da

$$d^2 = \sum_1^m (x_r - x'_r)^2 - \sum_{m+1}^{m+n} (x_r - x'_r)^2$$

dei quali gli ordinari spazi d'immersione cartesiani, corrispondono al caso $n = 0$; quelli relativistici al caso $n = 1$.

Lo studio completo di tali spazi, dei loro movimenti, della loro metrica, delle varietà in essi immerse forma la più immediata e necessaria estensione delle idee di Riemann sui fondamenti della geometria e forma altresì, la maggiore premessa per uno studio del calcolo diff. assoluto (nelle sue fondamentali interpretazioni) delle metriche a forma indefinita.

SOSTITUZIONI LINEARI PSEUDO-COMPLESSE. — (u-COMPLESSE).

Nota del dott. **Giorgio Barba**

(presentata nell' adunanza del dì 1. dicembre 1934 - XIII)

Sunto. — In questa Nota, proseguendo la ricerca iniziata nella precedente, l' A. studia le sostituzioni lineari su una variabile pseudo-complessa. Ne delinea le analogie e le differenze con quelle complesse, in rapporto alla presenza ed al numero di poli, alle forme canoniche, al numero di queste ed alla loro equivalenza; classifica tali sostituzioni e ne pone in rilievo l' aperiodicità.

1.) Consideriamo la sostituzione lineare

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sono quantità reali o, pseudo-complesse, e z, z' della forma:

$$a + ub \ .$$

Supponiamo inoltre che sia

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Una sostituzione lineare involgente il simbolo u, la denoteremo con « sostituzione lineare (u) » [1]).

L' operazione inversa di una sostituzione lineare (u) è ancora, ovviamente, una sostituzione lineare (u).

Vale anche qui immutato il concetto di polo.

Come il piano di GAUS, sul quale si distende la variabile complessa $x + iy$, si immagina avente un solo punto all' ∞, pensando cioè che per esso valga la metrica euclidea al finito, mentre la retta impropria si riduce ad un punto, così noi penseremo il piano u-complesso, fornito di un sol punto all' ∞, mentre su di esso valga la geometria iperbolica speciale.

---

[1]) Per le operazioni sull' unità u e simbolismo relativo vedasi mia Nota precedente « *Sui numeri complessi e su certi gruppi di trasformazioni quadratiche* » pubblicata in questo Rendiconto.

2.) Esaminiamo dapprima i tipi fondamentali di sostituzioni u-complesse.

A) Sia:

$$z' = z + h$$

con z e z' u-complessi ed h reale od u-complesso.

Sussiste in tal caso quanto nel caso ordinario. Mentre nel caso i-complesso tutte le quantità aventi modulo *nullo* sono eguali (a zero), nel campo u-complesso, due quantità di modulo nullo possono non essere uguali.

Il caso A) corrisponde ad una traslazione.

B) Sia

$$z' = kz.$$

Posto:

$$z = \rho\, e^{u\varphi} \quad ; \quad z' = \rho'\, e^{u\varphi'} \quad ; \quad k = c\, e^{u\alpha},$$

e quindi:

$$\rho' = \rho\, c \qquad \text{e} \qquad \varphi' = \alpha + \varphi$$

si hanno anche qui le torsioni come nel caso ordinario.

C) Sia

$$z' = \frac{1}{z}$$

cioè:

$$x' = \frac{x}{x^2 - y^2} \qquad \text{e} \qquad y' = \frac{-y}{x^2 - y^2}$$

e quindi:

$$x'^2 - y'^2 = \frac{1}{x^2 \quad y^2}\,.$$

Ne risulta che l'iperbole equilatera di parametro 1 è mutata in sè stessa e l'interno è mutato nell'esterno: si ha cioè inversione. È però da tener qui conto che per i punti situati sulle bisettrici si ha indeterminazione pel punto corrispondente in base alla C), in quanto ad un *qualunque* punto d'una bisettrice corrisponde il punto improprio dell'altra.

3.) Se nella (1) è $\alpha = \delta = 1$; $\beta = \gamma = 0$ essa dà:

$$z' = z$$

che è la sostituzione identica.

In generale, ora, per una sostituzione non identica, vediamo

quando la (1) lascia eventualmente invariati i punti del piano; dovrà aversi

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0. \tag{2}$$

Il metodo di risoluzione di tale equazione nel piano (u) è analogo all'ordinario, solo che bisogna tener presente il numero di radici quadrate nel piano (u).

Il discriminante di (2) è:

$$\Delta = (\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma$$

e si ha quindi:

$$z = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + R_u \sqrt{\Delta}$$

dove s'è messo R_u per ricordare che siamo nel piano (u).

Il numero delle radici della (2) dipende in conseguenza da Δ.

(A) Se Δ *non* cade sulle bisettrici o nella I regione, non esistono soluzioni della data equazione ed in tal caso nessun punto è lasciato invariato dalla data sostituzione lineare.

(B) Se Δ cade nell'interno della I regione si hanno quattro soluzioni distinte della equazione (2), ossia *quattro poli.*

(C) Se Δ cade sulle bisettrici, si hanno quattro soluzioni della (2), ma a coppie coincidenti, ossia *due poli*, da considerare però doppi.

(D) Se è $\Delta = 0$, abbiamo ancora quattro radici della (2) ma *coincidenti* in:

$$z = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma},$$

da considerarsi quadrupla, e quindi *un* polo quadruplo.

Escludiamo che possa essere Δ i-complesso. Dunque, prescindendo dalla molteplicità, i poli ad affisse distinte possono essere: *nessuno, quattro, due, uno.*

Se, in particolare, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono reali e quindi Δ è reale, (escludendo $\Delta < 0$) si hanno sempre quattro soluzioni, ma due di queste sono reali e due u-complesse. (Le due reali coincidono per $\Delta = 0$).

4.) Vediamo ora la classificazione delle sostituzioni.

Se $\Delta = 0$, si ha un solo polo e la sostituzione la diremo *u-parabolica*. Essa lascia fisso il punto all'∞. Naturalmente essa è aperiodica.

Esaminiamo il caso in cui la (1) lasci fissi quattro punti (poli). Per la (2) si hanno, com'è noto, quattro radici.

Se poniamo per semplicità:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha - \delta}{2\gamma} = A \\ \dfrac{\sqrt{(\alpha+\delta)^2 - 4}}{2\gamma} = B \end{cases}$$

le quattro radici sono:

$$\begin{cases} p = A - B \\ q = A + B \\ r = A - uB \\ s = A + uB \end{cases}$$

Volendo seguire un procedimento il più possibile vicino a quello del caso ordinario, occorrerà considerare a coppie le quattro radici, sì che su ogni coppia si possa tentare il suddetto procedimento.

Ora, le possibili coppie sono:

$$(p, q) \; ; \; (r, s) \; ; \; (p, r) \; ; \; (q, s) \; ; \; (p, s) \; ; \; (q, r) \; .$$

Si vede facilmente che solo le coppie (p, q) e (r, s) hanno le proprietà di avere lo *stesso prodotto e la stessa somma.*

Per uniformità col caso ordinario conviene quindi limitarsi a questi due tipi di coppie.

Esplicitando $A^2 - B^2$ si trova:

$$A^2 - B^2 = \frac{-\beta}{\gamma}$$

e perciò possiamo concludere che le due coppie considerate godono le stesse proprietà e precisamente quelle del caso ordinario per una equazione di secondo grado.

Per tali due coppie, (p, q), (r, s), con procedimento analogo all'ordinario si traggono rispettivamente:

$$\frac{z' - p}{z' - q} = \theta \, \frac{z - p}{z - q} \qquad (\omega)$$

e

$$\frac{z' - r}{z' - s} = \theta' \, \frac{z - r}{z - s} \qquad (\Omega)$$

con:

$$\theta = \frac{(\alpha - \gamma p)^2}{\alpha^2 - \alpha\gamma(p+q) + \gamma^2 pq}$$

$$\theta' = \frac{(\alpha - \gamma r)^2}{\alpha^2 - \alpha\gamma(r+s) + \gamma^2 rs}$$

da queste, tenuto conto dei valori della somma, S, e del prodotto, P, delle due coppie di radici in esame, si trae:

$$\begin{cases} \theta = (\alpha - \gamma p)^2 \\ \theta' = (\alpha - \gamma r)^2 \end{cases}$$

che conducono a:

$$\theta = \left[\frac{\alpha + \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}\right]^2$$

e

$$\theta' = \left[\frac{\alpha + \delta + u\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}}{2}\right]^2$$

5.) Le due formule (ω) e (Ω) del poragrafo precedente dànno rispettivamente:

$$zz'(1-\theta) - z(p - \theta q) - z'(q - \theta p) + pq(1-\theta) = 0$$
$$zz'(1-\theta') - z(r - \theta' s) - z'(s - \theta' r) + rs(1-\theta') = 0.$$

Supposto $\theta \neq 1$ e $\theta' \neq 1$, perchè tali due espressioni siano equivalenti occorre che sia

$$\begin{cases} \dfrac{p - \theta q}{1 - \theta} = \dfrac{r - \theta' s}{1 - \theta'} \\ \dfrac{q - \theta p}{1 = \theta} = \dfrac{s - \theta' r}{1 - \theta'} \end{cases} \tag{3}$$

che da un lato conducono a:

$$p + q = r + s$$

che è ben vero.

D' altro canto la differenza tra le due (3) dà:

$$(p - q)\frac{1 + \theta}{1 - \theta} = (r - s)\frac{1 + \theta'}{1 - \theta'} \tag{4}$$

relazione, effettivamente verificata dai valori già trovati per $p, q, r, s, \theta, \theta'$, come si constata subito.

Possiamo dunque affermare che le due relazioni (ω) e (Ω) sono equivalenti.

6.) Parallelamente alla sostituzione:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{f}$$

consideriamo l' altra:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta u}{u\gamma z + \delta} \qquad \text{(F)}$$

Le due hanno lo stesso modulo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & u\beta \\ u\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

ed inoltre dànno la stessa somma per i coefficienti estremi α e δ.

Troviamo ora i quattro poli di (f).

Posto:

$$\alpha + \delta = m + u\,n$$

si ha:

$$(\alpha + \delta)^2 - 4 = (m^2 + n^2 - 4) + 2mnu\ .$$

Posto poi:

$$\sqrt{(m+n)^2 - 4} = A \quad \text{e} \quad \sqrt{(m-n)^2 - 4} = B$$

ed applicando le formule per le radici u-complesse, di un u-complesso, si ha, ponendo ancora:

$$\alpha - \delta = \overline{m} + u\,\overline{n}$$

$$2p = \overline{m} + \frac{1}{2}(A + B) + u\left[\overline{n} + \frac{1}{2}(A - B)\right]$$

$$2q = \overline{m} + \frac{1}{2}(-A - B) + u\left[\overline{n} + \frac{1}{2}(-A + B)\right]$$

$$2r = \overline{m} + \frac{1}{2}(A - B) + u\left[\overline{n} + \frac{1}{2}(A + B)\right]$$

$$3s = \overline{m} + \frac{1}{2}(-A + B) + u\left[\overline{n} + \frac{1}{2}(-A - B)\right]$$

Risolvendo la *(F)* si ha poi:

$$z = \frac{\alpha - \delta + \sqrt{(\alpha + \delta)^2 + 4\beta\gamma}}{2u\gamma}$$

ossia le radici, p_1, q_1, r_1, s_1 di *(F)* si ottengono dalle analoghe di *(f)* moltiplicando per u.

$$p_1 = up \quad ; \quad q_1 = uq \quad ; \quad r_1 = ur \quad ; \quad s_1 = us.$$

Ora è:

$$2p_1 = 2up = \overline{n} + \frac{1}{2}(A - B) + u\left[\overline{m} + \frac{1}{2}(A + B)\right]$$

ed analogamente per le altre.

Ciò ci dice che i quattro poli di *(F)* sono simmetrici, rispetto alle bisettrici, dei quattro poli di *(f)*, ruotando nel senso antiorario; cioè a dire, la simmetria si ha rispetto alla bisettrice che si incontra ruotando positivamente.

Troviamo ora il θ relativo ad *(F)*.

Sarà, riferendoci alla coppia p_1, q_1:

$$\overline{\theta} = (\alpha - u\gamma \cdot up)^2 = (\alpha - \gamma p)^2 = \theta .$$

D' altra parte, come si è già visto, $\alpha + \delta$, rimane invariato, quindi le due sostituzioni *(f)* ed *(F)* hanno gli stessi caratteri.

Possiamo, quindi, limitarci allo studio della *(f)*. Analogamente, la sostituzione

$$z' = \frac{u\alpha z + \beta}{\gamma z + u\delta}$$

ha lo stesso modulo delle precedenti, ma le somme dei coefficienti estremi differiscono. Ciò nonostante, ha gli elementi che caratterizzano una sostituzione comuni con le precedenti.

Sicchè le sostituzioni:

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} ; \quad \frac{\alpha u z + \beta}{\gamma z + u\delta} ; \quad \frac{\alpha z + \beta u}{u\gamma z + \delta} ; \quad \frac{\alpha z u + \beta u}{\gamma z u + \delta u}$$

hanno lo stesso carattere.

7.) Data la sostituzione

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} ,$$

per l' esistenza dei poli, occorre che il discriminante $(\alpha + \delta)^2 - 47$ appartenga alla 1.ª regione.

Cioè:

$$(\alpha_1 + \delta_1)^2 + (\alpha_2 + \delta_2)^2 + 2u(\alpha_1 + \delta_1)(\alpha_2 + \delta_2) - 4$$

deve avere affissa nella 1.ª regione. Per il che occorre e basta che sia:

$$(\alpha_1 + \delta_1)^2 + (\alpha_2 + \delta_2)^2 > 4 \qquad (5)$$

$$(\alpha_1 + \delta_1)(\alpha_2 + \delta_2) > 0 \qquad (6)$$

ed inoltre:

$$(\alpha_1+\delta_1)^2+(\alpha_2+\delta_2)^2-4>2(\alpha_1+\delta_1)(\alpha_2+\delta_2). \qquad (7)$$

Il che porta che esistono i poli se:

$$\alpha_1+\delta_1>0 \text{ (e quindi } \alpha_2+\delta_2>0) \qquad A)$$

allorquando:

$$(\alpha_1+\delta_1)-(\alpha_2+\delta_2)>2 \qquad a)$$

oppure:

$$\alpha_2+\delta_2>\alpha_1+\delta_1 \quad \text{e} \quad (\alpha_1+\delta_1)-(\alpha_2+\delta_2)<-2 \qquad b]$$

$$\alpha_2+\delta_1<0 \text{ (e quindi } \alpha_2+\delta_2<0) \qquad B)$$

allorquando:

$$|\alpha_2+\delta_2|>|\alpha_1+\delta_1| \text{ e } (\alpha_1+\delta_1)-(\alpha_2+\delta_2)>2 \qquad a')$$

$$|\alpha_1+\delta_1|>|\alpha_2+\delta_2| \text{ e } (\alpha_1+\delta_1)-(\alpha_2+\delta_2)<-2. \qquad b')$$

Dunque da α e δ si può subito decidere della esistenza dei poli u-complessi.

Supporremo d'ora innanzi, soddisfatte le precedenti condizioni.

Se $|\theta=1$, la sostituzione la diremo *ellittica*.

Se

$$(\alpha+\delta)^2=4$$

è

$$\alpha+\delta=\pm 2$$

e quindi:

$$\theta=\left[\frac{\pm 2}{2}\right]^2=1\,.$$

Poichè in tal caso i poli coincidono in uno, diremo che per $\theta=1$ la sostituzione è *parabolica*.

Se invece, θ è reale e positivo, la sostituzione la diremo *iperbolica*.

In ogni altro caso la diremo *lossodroemica*.

Se i quattro poli si riducono a due, ci troviamo allora nel caso degenere, in quanto si tratta di *due poli distinti* sulle bisettrici.

8.) Si può far vedere che una sostituzione lineare u-complessa, non può essere una operazione di ordine finito.

Nella geometria iperbolica speciale, distanza di un punto dall'origine, come è noto, è l'espressione

$$\sqrt{|x^2 - y^2|} = \rho$$

dove x e y si possono riguardare coordinate di un punto di un'iperbole equilatera di parametro ρ ed avente le bisettrici degli assi quali assintoti; dunque:

$$x = \pm \rho \, Ch \, \tau \qquad ; \qquad y = \pm \rho \, Sh \, \tau.$$

Intanto le formole per la rotazione nella nostra geometria sono:

$$\begin{cases} x' = x Ch\theta + y Sh\theta \\ y' = x Sh\theta + y Ch\theta \ ; \end{cases}$$

facendo:

$$x = \rho \, Ch \, \tau \qquad \text{e} \qquad y = \rho \, Sh \, \tau$$

esse diventano, tenendo presenti le formole di addizione delle funzioni iperboliche:

$$\begin{cases} \rho' \, Ch \, \tau' = \rho \, Ch \, (\tau + \theta) \\ \rho' \, Sh \, \tau' = \rho \, Sh \, (\tau + \theta) \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} \rho' = \rho \\ \tau' = \tau + \theta \end{cases}$$

ossia, in una rotazione di ampiezza θ, il modulo resta invariato, mentre l'argomento viene aumentato di θ.

Vale a dire che il punto

$$P \equiv \pm \rho \, . \, \tau)$$

in seguito ad una rotazione di ampiezza θ, diviene:

$$P_1 \equiv (\pm \rho \, , \, \tau + \theta)$$

applicando a P_1 la stessa rotazione si passa a

$$P_2 \equiv (\pm \rho \, , \, \tau + 2\theta)$$

e dopo r rotazioni di ampiezza θ, si ha:

$$P_r \equiv (\pm \rho, \tau + r\theta).$$

D' altro canto P proviene da

$$P_{-1} \equiv (\pm \rho, \tau - \theta)$$

e così

$$P_{-2} \equiv (\pm \rho, \tau - 2\theta) \text{ ecc.}$$

Si viene in tal maniera ad inscrivere, sulla curva di equidistanza ρ dall' origine la successione di punti:

$$P_{\pm h} \equiv (\pm \rho, \tau \pm h\theta)$$

Per la costruzione fatta ogni triangolo $P_r O P_{r+1}$. si muta in un qualunque $P_s O P_{s+1}$ ed anche in particolare in $P_{r-1} O P_r$. Segue da ciò che tutti i segmenti $P_r P_{r+1}$ sono uguali e tutti gli altri argomenti corrispondenti alle direzioni $(P_r P_{r-1}, P_r P_{r+1})$ sono uguali.

Dunque abbiamo inscritto nella curva di equidistanza un poligono regolare.

Esso non può essere chiuso:

Infatti, se così fosse, P_0 dovrebbe coincidere con P_r, il che porterebbe a:

$$Ch(\tau + \theta) = Ch\,\tau$$
$$Sh(\tau + \theta) = Sh\,\tau$$

con θ reale; cioè le funzioni iperboliche dovrebbero essere periodiche a periodo *reale*, il che, come sappiamo, non è.

Il periodo, per le funzioni iperboliche è, come abbiamo visto, $2k\pi i$, dunque solo nel piano iper-complesso il poligono può chiudersi, e quindi solo in tal piano la sostituzione (i, u)-complessa può essere un' operazione finita.

Fondamenti per una geometria isotropa delle varietà numeriche a due dimensioni (metrica lineare; metrica angolare)

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 8 Dicembre 1934-XIII)

Sunto. — L'A. inizia con questa nota un esame delle geometrie che siano basate sui concetti di distanza e di angoli, intesi in senso generale, come elementi di due metriche duali. Fondamentali sono i concetti di curve-luogo di equidistanza; di curva-inviluppo isoclina; di punteggiata geodetica; di punto come fascio-inviluppo geodetico. È delineata l'impostazione di una metrica gruppale, analoga a quella di Cayley.

Premesse.

1. Sia data una varietà numerica a due dimensioni, della quale vi sia l'imagine in un piano cartesiano (con o senza coordinate omogenee, secondo l'opportunità). È possibile stabilire in essa una geometria la quale pur richiamando le basilari ricerche di Riemann e quelle di Minkowsky, tenga essenzialmente conto di un carattere gruppale, riavvicinandosi così alle metriche Cayleyane ed includendo anche le metriche ad elemento d'arco semidefinito (geometria iperbolica speciale).

Considereremo per ora geometrie di tipo metrico, intendendo con questa locuzione quelle geometrie nelle quali vi sieno invarianti fondamentali che dipendono da due punti (le diremo anche di II tipo), riservando il nome di geometrie di III tipo (o del tipo affine) a quelle per il quale l'invariante dipenda da tre punti e così via. In questa prima nota studieremo le varietà isotrope: aventi il carattere di quelle a curvature costante, che cioè si sovrappongono a loro stesse in ogni loro parte. Ulteriori sviluppi saranno dedicati a varietà non più godenti di questa proprietà, ma che tuttavia risultano immerse in altre (a numero di dimensioni maggiori) che ne godano.

Elementi di base.

2. Sia dunque scelto un punto P_0 (di coordinate x, y) e tutto il piano Cartesiano sia ricoverto da un sistema semplicemente infinito di curve K, tali che (genericamente o almeno in una certa regione) per un punto passi una sola di queste, K_0; e che esse riempiano tutto il piano (o almeno una sua regîone connessa). Ad ognuna di tali

curve K attribuiamo un numero d, tale che esso possa considerarsi come parametro di distribuzione delle curve nel sistema, con la convenzione che vari con continuità al variare con continuità della K nel sistema stesso; e che inoltre al valore $K=0$ corrisponda una K_{00} [1]) passante per P; ed al valore $K=\infty$ una curva $K'\infty$ unica ed indipendente da P_0.

Non è escluso però che la K_∞ possa essere imaginaria o indeterminata; quest'ultimo caso si presenta ad esempio se alla stessa curva K possono corrispondere valori diversi di d. Il parametro d si assumerà come «*distanza*» di un punto Q di K dal punto P.

Metrica lineare.

3. Consideriamo ora un gruppo Γ_0 di trasformazioni R ad un parametro — che chiameremo «rotazioni di polo P_0» — tali che ogni curva K venga trasformata in sè stessa da qualsiasi trasformazione di Γ_0. Naturalmente possono presentarsi diversi casi a seconda che le curve K_0 sotto le trasformazioni R si comportano in modo che un qualsiasi punto Q' di una di esse possa trasformarsi in un altro qualsiasi Q'' oppur no; ed a seconda dei diversi domini fondamentali che in tal guisa si ottengono su ciascuna delle K,

Attorno ad un altro punto P_1, si effettui ora una costruzione analoga, con la convenzione che si consideri anche il sistema K_1 ed il gruppo Γ_1; ed analogamente per un punto P_2 etc.

Però i tre sistemi di curve K_0, K_1, K_2 devono essere scelti in modo tale che se un'operazione di Γ_2 porta R_{i+1} in R_{i+2}, il sistema K_{i+1} si muta curva per curva nel sistema K_{i+2}, conservando ad ogni curva il valore numerico del suo parametro; e che inoltre la curva K_∞ sia comune a tutti i sistemi K_i.

Il piano cartesiano (o la regione considerata) vengono allora ad essere ricoverti da ∞^3 curve K, distribuite in $\infty^2{}_0$ sistemi K_r, di cui ciascuno relativo al punto P_r; vengono ad essere collegati a questi sistemi ∞^2 gruppi Γ_r ad un parametro che lasciano invariata la K^∞.

In sostanza resta possibile fissare arbitrariamente in un punto P le curve K ed il gruppo Γ; negli altri sorgono dei vincoli.

4. Fra due punti generici $P_0\ P_1$ resti fissata dunque la distanza di P_1 da P_0: $\overline{P_0P_1}$.

Se noi percorriamo nel piano cartesiano una qualsiasi curva che

---

[1]) Convenendo $P_0 \equiv P_3 \equiv P_6 \ldots;$
$P_1 \equiv P_4 \equiv P_7 \ldots$
$P_2 \equiv P_5 \equiv P_8 \ldots$

da P_0 conduce a P_1, potremo considerare su questa curva una catena di $(n+1)$ punti $P_0^{(n)} \equiv P_0$; $P_1^{(n)}$; ... $P_n^{(n)} \equiv P_1$, e considerare la « lunghezza » di questa catena come espressa dal sommatorio:

$$\sum_{0}^{n-1}{}' \overline{P_r^{(n)} P_{r+1}^{(n)}}$$

Se avviene che al tendere comunque della catena alla curva, cioè se al divergere di n ed al formarsi di un insieme denso su $P_0 P_1$, quel sommatorio tende ad un limite, questo limite si dirà *« lunghezza »* delle curve $P_0 P_1$.

Affinchè ciò avvenga, si deve avere la convergenza di un processo di tipo integrale; e quindi *genericamente* la distanza $P_0 P_1$ deve essere di primo ordine assieme alla ordinaria distanza euclidea.

Le curve per le quali questa espressione di lunghezza si estremizza, *se esistono*, si diranno le geodetiche in quella metrica.

Ed allora la V_3 considerata risulta ricoverta da un sistema ∞^3 di curve K di equidistanza; da un sistema ∞^2 di geodetiche G.

Per la stessa costruzione è ovvio che le G sono anch'esse invarianti rispetto ai movimenti; quindi da ogni punto esce un sistema ∞^1 di curve G che sono — genericamente — fissate o dalla direzione o comunque da un secondo punto [1]).

Metrica angolare.

Poichè abbiamo premesso che scelto un punto P vi è un gruppo ad un sol parametro che trasforma in se stesse le curve di equidistanza attorno a P, e che le geodetiche sono invarianti in queste trasformazioni, ne consegue che attorno a P possiamo fissare una metrica angolare proprio per mezzo del parametro di tale gruppo. Quindi ad ogni direzione (differenziali primi cioè) attorno a P viene collegato un valore di tale parametro, partendo da una data direzione (ad esempio quello dei $dy = 0$ che corrisponde alla rette parallele all' asse X nel piano di sostegno.

[1]) Data la costruzione delle geodetiche, come estremali di un processo integrale che viene a dipendere da differenziali primi, dovranno nella loro espressione, valere delle equazioni differenziali o quasi — differenziali (se vi sono integrali di tipo Stieltjes) di secondo ordine; ciò implica appunto che in una certa « direzione » fissata dal differenziale primo in un punto, esce da tale punto una sola geodetica (o almeno non una infinità semplice dipendente da parametro continuo). E come ulteriore conseguenza ne segue che due punti, sufficientemente vicini, fissano una ed una sola geodetica.

D'altro canto, trasformata in sè stessa la varietà con un qualunque movimento, i gruppi ad un parametro esistenti attorno ad ogni punto vengono trasformati l'uno nell'altro, se un punto passa in un'altra posizione. Quindi resta così fissata la metrica angolare in tutta la varietà in modo unico ed invariante rispetto ai movimenti.

Ma, allora rispetto alle curve luogo di equidistanza, bisognerà considerare anche delle *curve inviluppo isocline*, costituite dall'inviluppo di tutte le geodetiche che incontrano sotto « angolo » costante una geodetica fissata; e queste curve isocline rappresentano a loro volta delle curve invarianti per i movimenti.

Inoltre, scelte due geodetiche prefissate, e considerando i punti d'incontro di una qualunque altra geodetica con esse, sarà possibile introdurre coordinate duali atte a caratterizzare questa, così come le coordinate delle varietà di sostegno sorvono ad individuare i punti. E, per un ragionamento già fatto altrove [1]) si vedrà che la metrica angolare, espressa mediante queste coordinate assume un aspetto analogo alla metrica lineare già esistente, salvo a sostituire alle curve di equidistanza precisamente quelle isocline.

Pertanto, come le geodetiche rappresentano le estremali della « lunghezza » nello spostamento di un punto da una all'altra posizione, i punti rappresentano le estremali (in senso duale) dell'« angolo » nello spostamento di una geodetica da una all'altra posizione.

E la varietà risulta così ricoverta da punti, con una certa metrica lineare con le ∞^3 curve di equidistanza, con le ∞^2 geodetiche; e — *dualmente* — da geodetiche, con una certa metrica angolare, con gli ∞^3 inviluppi isoclini, con gli ∞^2 punti (che sono così le « geodetiche » duali).

Se ora si considerano tre punti A, B, C e le tre posizioni di geodetiche $c \equiv (AB)$, $a \equiv (BC)$; $b \equiv (CA)$, noi verremo ad avere tre angoli e tre distanze. In un qualunque movimento ABC si porta in $A'B'C'$, con lunghezze invariate ed angoli invariati. Quindi varranno delle formule per cui dati tre elementi del triangolo, questo risulta (genericamente, a meno di casi di degenerazione o della metrica lineare o di quella angolare) determinato: e gli altri tre elementi si esprimeranno in funzione di quei tre soltanti.

Il complesso di queste formule costituirà la trigonometria in quella varietà.

L'esempio immediato della validità di quanto sopra esposto, si trova nelle metriche Cayleyane. Se si trasforma mediante una arbitraria trasformazione il piano di sostegno, si avrà subito un altro esempio di metriche non più Cayleyane.

---

[1]) Vedi Nota bibliografica in fondo.

È bene ricordare che la geometria va ancora (secondo le nostre vedute) completata con un parallelismo (trasporto rigido di fasci di direzioni) e con un metrismo (trasporto rigido di punteggiate). Ciò faremo in una prossima Nota.

5. Per alcuni concetti quì sviluppati occorre riferirsi alle seguenti note e memorie di G. ANDREOLI:

1. *Metriche cayleyane etc. Geometrie non euclidee*, Atti Acc. Gioenia Catania, 1932.
2. *Coppie reciproche di V_2 etc. Nota I. Problemi variazionali.*
3. » » » *Nota II. Formazioni e proprietà.* Rend. R. Acc. Lincei, 1932.
4. *Parallelismi, riferimenti locali, trasporti rigidi.* Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1932.
5. *Geometria completa dei trasporti etc in una V_2*, Ann. R. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1933.

SOPRA I POLINOMI DEFINITI

Memoria del dott. **A. Colucci**

(presentata nell' adunanza del dì 19 maggio 1934 - XII
per essere inserita nel volume XX degli Atti)

Sunto. — L'Autore, data l'importanza che i polinomi definiti hanno in varî rami dell'analisi, si propone di fare uno studio sistematico di essi, sia completando e perfezionando alcuni risultati ottenuti da altri autori in tale campo, sia aggiungendo per proprio conto nuovi teoremi.

Il lavoro si può riguardare composto di tre parti. In una, vengono dati due criteri per riconoscere quando è che un polinomio è definito in un intervallo o su tutto l'asse reale; in una seconda parte si possono inquadrare le diverse rappresentazioni che di essi polinomi vengono date, di cui la più saliente è quella ottenuta per mezzo di un gobbo circolante; infine, in un'ultima parte, vengono assegnati alcuni processi permettenti di ottenere parecchie classi di polinomi definiti.

Processo verbale dell'adunanza del dì 3 novembre 1934 - XIII.

Assistono all'adunanza i soci ordinari residenti De Lorenzo, del Pezzo, d'Erasmo, Diamare, Longo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini, ed i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Gallucci, Nobile, Pascal Mario e Quercigh.

Funziona da presidente il socio De Lorenzo e da segretario il socio D'Erasmo.

Il segretario presenta il fascicolo Gennaio-Giugno del Rendiconto 1934, già distribuito ai soci, nonchè le memorie Jossa, d'Erasmo, Marcolongo, Andreoli e Spampinato accolte nel volume XX degli Atti. Indi comunica che con una nota del socio del Pezzo *Sulle involuzioni piane e sul numero di Caporali*, pervenuta in Segreteria il 2 luglio, si è iniziata la stampa del nuovo fascicolo del Rendiconto.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati il vol. II dei *Principî di geometria proiettiva* del socio del Pezzo, il volume I della nuova raccolta periodica dal titolo *Questioni meridionali*, inviato dal socio Giordani, e due lavori del socio D'Erasmo: *Il mare pliocenico nella Puglia* e *Su alcuni avanzi di vertebrati terziari della Sirtica*. L'Accademia ringrazia i donatori.

Il socio Scorza presenta, per gli Atti, una sua memoria dal titolo *Le algebre del III ordine*. Con votazione unanime (astenuto il solo socio Scorza) l'Accademia approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il Rendiconto, una sua nota sugli *Indici di attrazione, di selezione, di omogamia nei fenomeni statistici*.

Processo verbale dell'adunanza del dì 10 novembre 1934 - XIII.

Sono presenti i soci ordinari residenti Bakunin, De Lorenzo, del Pezzo, Marcolongo, Masoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini, e i soci corrispondenti Andreoli, Carnera, Carrelli e Colosi.

Funziona da presidente il senatore De Lorenzo e da segretario il socio Pierantoni.

Il segretario dà lettura del processo verbale della tornata 3 novembre, che è approvato. Indi comunica la richiesta di cambio da parte della Osaka Imperial University per le sue pubblicazioni e del Ministero delle Finanze per la Rivista del Catasto e dei servizi tecnici erariali. Si delibera di concedere ad entrambi il cambio del Rendiconto a cominciare dal gennaio 1934.

Il socio ANDREOLI presenta la Nota del dott. G. BARBA *Sui numeri complessi e su certi gruppi di trasformazioni quadratiche* e riferisce su di essa. Sarà votata per l'inserzione nel Rendiconto nella prossima seduta.

Processo verbale dell'adunanza del dì 17 novembre 1934 - XIII.

Presiede il socio anziano DEL PEZZO. Sono presenti i soci DE LORENZO, LONGO, BOTTAZZI, SCORZA, QUAGLIARIELLO, DIAMARE, MARCOLONGO, BAKUNIN, PASCAL, MASONI, PIERANTONI (ff. segretario), ed i corrispondenti ANDREOLI, QUERCIGH, RIZZO, COLAMONICO, CARRELLI, PASCAL Mario e RICCI.

Letto ed approvato il processo verbale della tornata del 10 novembre, il segretario comunica una lettera dell'Accademia d'Italia riguardante il tema sul convegno Volta. Si decide di aderire al tema proposto dalla classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali della stessa Accademia.

Indi riferisce che il Consiglio Nazionale delle Ricerche chiede che vengano fatte proposte per la fondazione dell'Istituto Elettrotecnico Italiano. Si costituisce una Commissione, composta dai soci GIORDANI, SIGNORINI, CARRELLI e RICCI per formulare tali proposte.

Il socio PIERANTONI offre in omaggio all'Accademia il volume XX dell'Archivio Zoologico Italiano dedicato alla memoria di Paolo ENRIQUES. Il Presidente ringrazia in nome dell'Accademia.

Il socio ANDREOLI comunica ed illustra una seconda nota del dott. BARBA su *Sostituzioni lineari pseudo-complesse* per l'inserzione nel Rendiconto. Sarà votata nella prossima tornata.

Si vota per la inserzione nel Rendiconto della nota dello stesso dott. BARBA *Sui numeri complessi e su certi gruppi di trasformazioni quadratiche* presentata nella scorsa tornata. È approvata alla unanimità.

Processo verbale dell'adunanza del dì 1. dicembre 1934 - XIII.

Sono presenti i soci DE LORENZO (pres.), PIERANTONI (segr.), MASONI, PASCAL Ernesto, MARCOLONGO, DIAMARE, DEL PEZZO, LONGO, SCORZA, BAKUNIN, BOTTAZZI, QUAGLIARIELLO, ed i soci corrispondenti ANDREOLI, COLOSI e RICCI.

Il segretario legge il processo verbale della tornata del 17 novembre, che è approvato.

Si vota e si approva l'inserzione nel Rendiconto della 2ª nota del dott. BARBA presentata nella tornata del 17 novembre.

Il socio ANDREOLI presenta ed illustra una sua nota *Sulla geo-*

metria piana Cayleyana e sulle metriche a forma quadratica indefinita per l'inserzione nel Rendiconto.

Processo verbale dell' adunanza del dì 8 dicembre 1934 - XIII.

Presiede il senatore De Lorenzo, segretario Pierantoni, presenti i soci ordinari residenti Bakunin, Bottazzi, del Pezzo, Longo, Masoni, Pascal Ernesto, Signorini ed i soci corrispondenti Andreoli, Carrelli, Carnera, Nobile e Ricci. Alcuni intervengono anche per l'assegnazione del premio Sementini quali rappresentanti della Facoltà di Scienze della R. Università.

Il Presidente annunzia il grave lutto incorso al socio Scorza per la morte della sua consorte e crede d'interpretare il voto dell'Accademia inviando al consocio i sensi di solidarietà dei colleghi.

Il segretario legge il processo verbale della seduta precedente, che è approvato.

Comunica poi il progetto di calendario per il 1935, che è approvato.

Legge quindi una lettera dell'Ing. Gaetano Ivaldi che invia un libro a stampa, dal titolo *La scienza relativa all' esperienza,* per avere il parere dell' Accademia. Non essendovi precedenti di parere dati specialmente su libri già pubblicati, si decide di non dar corso al desiderio dell' Autore.

La socia Bakunin dà lettura delle relazioni sull'assegnazione del premio accademico e di quello Sementini. Per il primo la Commissione propone di assegnarlo al lavoro col motto *Provando e Riprovando.* Per il premio Sementini propone di assegnarlo alla Dott. Teresa Maresca. Le conclusioni sono approvate: per il premio accademico l'apertura della busta col motto sarà fatta nella seduta generale.

Il socio Andreoli presenta per i Rendiconti un suo lavoro dal titolo *Fondamenti per una geometria isotropa delle varietà numeriche a due dimensioni.*

Pubblicazioni di Accademie, Società, Istituti scientifici, e Giornali pervenuti alla R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli

dal dì 1 Gennaio al 31 Dicembre 1934 (XII - XIII).

N.B. — Delle indicazioni che seguono il titolo di ciascuna pubblicazione, la prima dinota il volume, la seconda l'annata o la data della edizione, la terza infine dinota la parte o il fascicolo o il numero o il mese. Ciascuna viene sostituita da puntini quando per quella speciale pubblicazione non si segue il sistema di aggruppamento in serie o in volume, o di suddivisioni in fascicoli.

La inserzione in questo elenco valga come ringraziamento alle Accademie, Società ed Istituti scientifici, Amministrazioni e Direzioni di Giornali qui sotto nominate.

Albany — Education Departement of the State of New York — New York State Museum.
Handbook — n. 12, 1933.

Amsterdam — K. Akademie van Wetenschappen.
Proceedings of the Section of Sciences. — Vol. XXXV, n. 1-10, 1932.
— » XXXVI, » 1-10, 1933.
Jaarbock — 1932-33 — 1933.
Verslagen van de gewone Vergaderingen d. wis.-en natuurk. Afd. — Vol. XLI-XLII, 1934.

Wiskundig Genootschap (Société mathématique).
Nieuw Archief voor Wiskunde — Vol. XVIII, n. 3 a 5, 1934
Revue semestrielle des publications mathématiques.
— Vol. XXXVIII, n. 5 a 6, 1933.
— » XXXIX, n. 1 a 4, 1934.
Table des Matieres — » XXXV-XXXVI, 1934.

Annamalai — Indian Mathematical Society.
The Mathematics Student — Vol. I, n. 1 a 3, 1933.

Atene — Académie d' Athènes.
Praktica — Vol. VIII, n. 1 a 7, 1933.

Baltimore — Johns Hopkins University.
American Journal of Mathematics. — Vol. LVI, n. 1 a 4 1934.
Circulars — N. S., 1933, n. 3 a 10, 1933.
— » 1934, n. 1 a 7, 1934.

Barcelona — R. Academia de Ciencias y Artes.
Boletin — Serie III, Vol. VI, n. 5; 1934
Memorias — » III, » XXIII, 16 a 25. 1933 34.
Nomina del personal academico — 1933-34; 1934.

Bari — Ente Autonomo per l'Acquedotto Pugliese.
Relazione al Parlamento — 1932-33. 1934.

Basilea — Societ. Physica Helvetica.
Naturforschenden Gesellschaft — Band XLIII, 1931 a 33
— » XLIV, n. 1 e 2, 1933.

Batavia — Kon. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium.
Seismological Bulletin — 1934 Genn. a Giu. 1933
Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië
— 1931; 1934.
Rechercheas Indies Sciencel Council — n. 7, 1934.

Belgrade — Academie Royale Serbe.
Bulletin — n. 1, 1933.
Sciences Mathématiques et Natural. — n. 1, 1933.

Berkeley — University of California.
Lick Observatory. Publications.
Publications in Geology (Bulletin) — Vol. 23. n. 3 a 7, 1933.
» » Zoology — » 39. » 8 a 11, 1933.
— » 40, » 1 a 4, 1933.

Berlin — Preussische Akademie der Wissensch., phys-math. Klasse.
Abhandlungen — 1933, n. 1 e 2; 1934.
Sitzungsberichte — 1933, XXIII a XXXIII; 1933.
— 1934, I a XII; 1934.
Preussische Meteorologisches Institut.
Abhandlungen — Vol. X, n. 4 e 5, 1934.
Veröffentlichungen. Ergebnis. der Beobachtungen
Bericht. — 1933, n. 402, 1934.

Bern — Naturforschende Gesellschaft.
Verhandlungen — 114; 1933.

Birmingham — Natural History und Philosophical Society.
Proceedings — Vol. XVI, n. 5, 1934.

Bloemfontein — Nationale Museum.
Paleontologiese Navorsing — Vol. II, n. 5. 1934.

Bologna — Periodico di Matematiche.
— Ser. IV, Vol. XIV, n. 1 a 4, 1934.
Unione Matematica italiana. Bollettino.
— Anno XII, n. 5, 1933.
Osservatorio della R. Università. Osservazioni
meteorologiche dell'annata 1932-33.

Bonn — Naturistorischer Verein.
Sitzungsbericht — Bd. 1932-33, 1934.
Verhandlungen — Bd. n. 89 e 90, 1933.

Bordeaux — Société des sciences physiques et naturelles.
Procès-verbaux — 1930-32; 1932.
Université et Société Scientifique d'Orcachon.
Station biologique. Bulletin. Tom. 29, 1932.

Boston — American Academy of Arts and Sciences.
Proceedings — Vol. 67, n. 9 e 10. 1933-34.
— » 68, n. 11 a 13, 1934.
— » 69, n. 1 a 6, 1934.

Society of natural History.
Occasional Papers — Vol. VIII, pag. 61 a 124. 1933-34.

Brescia — Ateneo.
Commentarii — 1932-1933.

Brisbane — Queensland government Mining.
Journal — Vol. XXXIV, Nov. e Dicembre 1933.
— » XXXV, Genn. a Sett. 1934.

Brno, Čechoslovakia — Université Masaryk — Faculté de Médecine.
Publications — 1932, S 2, 115 a 131, 1933-34.

Université Masaryk — Faculté des sciences.
Publications — 1932, n. 159 a 166, 1932.
— 1933, n. 167 a 190, 1933-34.

Institut National Agronomique.
Bulletin — 1931, n. 29. 1931.

École des Hautes Études veterinaires.
Publication biologiques — Vol. XI, n. 151 a 165; 1932.

Societas Scientiarium Naturalium.
Acta — Fasc. 65 a 76, 1933.

Bruxelles — R. Acad. des Sc., des Lettres et des Beaux-arts de Belgique.
Bulletin. Classe de sciences — Ser. V, Vol. XIX, n. 10 a 12. 1933,
— » V, » XX, n. 2 a 7, 1934
Mémoires. Coll. in 8°. Cl. de sciences
— Vol. XII, n. 7 e 8, 1934.
— » XIII, n. 1 a 3, 1934.
Mémoires. Coll. in 4°. Cl. de sciences
— Ser. II, Vol. XI, n. 1, 1934.
Anuaire 1934 — c. 1934.

Société Royal Belge de Géologie, de Paléont., et d'Hydrologie.
Bulletin — Vol. XLIII, n. 3, 1934
— » XLIV, n. 1 e 2, 1934.

Socièté Royal Zoologique et Malacologique.
Annales — Vol. XLIII, 1933.

Budapest — Magyar Mérnöcök Lapja.
Technika — Vol. XIV, n. 5 a 10, 1933.
— » XV, n. 1 a 6, 1934.

Ungarischen Akademie der Wissenschaften. Mathematischer und Naturwissenschaftlicher Anzeiger.
B. XLVIII, n. 1 e 2, 1932.

Bericht aus Ungrn.
B. XXXVIII, 1932.

Koniglischen Ungarischen Anstalt.
1917-1924-1934.

Buenos Aires — Sociedad Cientifica Argentina.
Anales — Tom. CXVI, n. 5 e 6, 1933.
— » CXVII, n. 1, 1934.
— » CXVIII, n. 2, 1934.

Seminario Matematico.
Buletin. Vol. III, n. 13 e 14. 1933.

Istituto Bacteriologico del Departemento di Higiene.

Folia Biologica.
N. 34 a 38, 1934.

Cagliari — R. Università - Semin. d. Fac. d. Sc.
Rendiconti — Vol. III, n. 1 e 2, 1934.

Società fra i cultori delle Scienze Mediche e Naturali.
Atti, N. S., Vol. VIII, n. 6, 1933.
» IX, n. 1 a 4, 1934.

Calcutta — Geological Survey of India.
Memoirs — Vol. LV, part. 2 1933.
» LIX, 1934.
» LXII, part. 1 e 2, 1934.
» LXIV, part. 1, 1933.
» LXV, part. 1 e 2, 1933-34.
Memoirs (Palaeontologia indica)
— N. S. Tom. XX, n. 4, 1934.
» XXII, n. 2, 1933.
Records — » LXIII, n. 4, 1933.
» LXIV, n. 2, 1934.
» LXVII, n. 4, 2934.
» LXVIII, n. 2 e 3, 1933-34.

Cambridge (England) — Cambridge Philosophical Society.
Proceedings — Vol. 30, n. 1 a 4, 1934.

Cape Town — Royal Society of South Africa.
Transactions — Vol. XXI, n. 4, 1934.
» XXII, n. 1 a 3, 1934.

Catania — Circolo Matematico. Esercitazioni matematiche.
Ser. II, Vol. VII, fasc. 1 a 10, 1933-34.

Chicago — Field Museum of Natural History.
Botanical Series — Vol. VII e VIII e indice, 1932.
Geological Series — » IV, pag. 61 a 82 e indice, 1933.
Zoological Series — » X, pag. 1 a 66, 1933.
Report Serie — » IX, n. 2, 1933.

Chracovie — Académie polonaise des Sciences et Lettres.
Bulletin International — A, 1 a 10; 1934.
— B, 1 a 10, 1934.

Acad. Polon. de Sc. e lett. Classe des Scienc. Mathém. et naturelles.
— B - 1; n. 5. 1933.
— B - 8; n. 10, 1933.
Comptes rendus Mens. — 1933. n. 4 a 10; 1933.
— 1934, n. 1 a 7; 1934.

Chur — Naturforschende Gesellschaft.
— Jahresbericht, N. S., Vol. LXXI, 1933.

Delft — Technische Hoogeschool.
Programma — . . . ; 1934-35 ; 1934.

Dijon — Académie des Sciences, Arts et Lettres.
Mémoires — . . . ; 1932-1933.

Dublin — Irish Academy.
Proceedings — Vol. XLI - A, 13 a 14 1933
— » XLII - A, 1 a 4. 1933.
— » » B, 15 a 17, 1933.
— » » C, 1 a 4. 1934.
— » » C, 10 e 11. 1934.
— » » C. 1 a 7, 1934.
Index — 1907 to 1932 1934.

R. Society.
Scientific Proceedings — N. S. ; 20, n. 41, 1933.
— » 21, n. 1 a 2, 1934.

Easton Pa. (v. Baltimore) — American Chemical Society.
Journal — . . . ; 56, n. 2 e 3, 1934.

Edinburgh — R. Society.
Proceedings — Vol. LIII, part. IV, 1933.
— » LIV, 1 e 2, 1934.
Transactions — » LVII, 1 a 3, 1934.
— » LVIII. — 1 — 1934.

Geological Society.
Transactions — Vol. XIII, part. I, 1934.

Erlangen — Physikal. Mediz. Societät.
Sitzungsberichte. B. 63 e 64. 1931 32, 1934.

Ferrara — Accademia delle Scienze Mediche e Naturali.
Atti — Vol. II, n. 6, 1934.

Firenze — R. Biblioteca Nazionale Centrale.
Bollettino delle pubblicazioni italiane.
1933, n. 388 a 390, 1933 — 1934; n. 391 a 398, 1934.

R. Università.
Pubbl. dell'Osserv. di Arcetri — N. 52, 1934.

Fiume — Società di Studi fiumani.
Anno X, 1932.

Formosa — Taihoku Imperial University.
Memoirs of the Faculty of Science — Vol. X, n. 2 a 4, 1934.

Frankfurt (am Mein) — Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft.
Abhandlungen — Vol. 40, n. 4, 1933.
Bericht — » 63, n. 9 a 12, 1933.
— » 64, n. 1 a 5. 1934.

Giessen — Oberhessischen Gesellschaft.
Medizin — N. S. ; B. 14. 1932.
Naturud — N. S. ; B. 15. 1933.

Glasgow — University.
Calendar — 1934-35 ; 1934.
Publications — Vol. XXXI, XXXII, XXXIII, 1934.

Göteborg — Stadtsbibliotek. K. Vetenskaps-och Vitterhets-Samhället.
Handlingar — Ser. B. Bd. III, 1933.
— » 1933 — 52 — 1934.

Göttingen — Gesellschaft der Wissenschaften.
Abhandl. — Math. phys. Klasse — N. F. III; 9 a 18; 1934.

Graz — Naturwissenschaftlicher Verein.
Mittheilungen — Vol. 70; 1933.

Haarlem — Hollandsche Maatschapij der Wetenschappen (Société Hollandaise des sciences).
Archives Néerlandaises des sciences exat. et nat.
— Serie III, Vol. XIV, 2, 1933
— » » XIX, 1 a 3, 1934.
Phonétique experimentale — » C » VIII, 4, 1933.
— » C » XIX. 1933
Zoologie — ... tom. I, n. 1 e 2, 1934.
Teylers's Stichting — Musée Teyler.
Phisica — I — n. 7 a 9, 1934.

Habana — Sociedad Cubana de Ingeneros.
Revista — XXV, n. 6; 1933.
— XXVI, n 1 a 5. 1934.

Halifax — Nova Scotia Institute of Science.
Proceedings and Transactions — Vol. XVIII, n. 3. 1934.

Halle — Leopoldische-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher.
Abhandlungen (Nova Acta) — N. S.; tom. 1 a 5. 1933 34.

Hamburg — Mathematische Gesellschaft.
Mittheilungen — Vol. VII, n. 4, 1934
Mathematisches Seminar.
Abhandlungen — Vol. X, 1934.

Heerlen — Geologisch Bureau.
Jaarverslag — 1932.

Hiroshima — Hiroshima University.
Journal of Sciences — Serie A. Vol. 4. n. 1 a 3. 1934.

Heidelberg — Naturhistorisch-Medizinischen Verein Verhandlung.
N.F. B. XVII, Hef. 4, 1933.

Helsingfors — Finska Vetenskaps Societ. (Societas Scient. Fennica).
Commentationes Physico-Matematicae — Vol. VII, n. 1 a 14 1934.
Biologicae — » IV, n. 1 a 9 1934
Arsbok — Vuosikirja — Vol. XI e XII, 1933 34
Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk.
— H. 84, n. 10, 1934
— H. 85, n. 10, 1934.
Societas pro fauna et flora fennica.
Acta Botanica fennica — Vol. 12, 1933.
» Memoranda — 1931-32, n. 8, 1933
» — 1932-33, n. 9, 1934.
Acta — 57, n. 2 e 3, 1934.
Index — 1934.
Association d'océanographie physique.
Proces-verbaux — n. 1, 1933.

Illinois — University.
Bulletin — n. 259 a 401, 1933 34.
— Vol. XXXI, n. 24 a 44 1934.

Natural History Survey.
Bulletin — Vol. XX, II, 1933.

Iowa — University.
Studios in Natural history — N. S., n. 268, 1934
— IV, 1, 1933.
» in Child Welfare — VII, 5, 1933.
» in Education — VIII, 6 e 7. 1933.
— IX, n. 2 a 7, 1934.

Irkutsk — Geological and prospecting trust.
Transactions — 1933; n. 2 a 4, 1933.

Ithaca — Cornell University. (Agricolt. Exper. Stat.).
Memoires — 147 a 152, 1933.
Bulletin — 538 a 594. 1933-34.

Jassy — University.
Annales Scientifiques — Vol. XIX, 1934.

Kjöbenhavn — Kongel. Danske Videnskabernes Selskab (Acad. royale des sciences et des lettres de Danemark).
Matematisk-fysiske Meddelelser — Vol. XII, n. 9 a 14, 1934.
Biologiske » — » XI, n. 1 a 7, 1934.
Oversigt Forhandlinger (Bulletin)
— 1933-34; 1934.
Vidensk. Selsk. Skrifter naturvidenskabelig og mathematisk Afhandl. (Mémoires, Classe des Sciences)
— 5. 9ª, Tom. V, n. 3 1934.

Direzione del Periodico.
Mathematisk - Tidsskrift A — 1933, 4; 1933.
» — 1934. 2 3; 1934
B — 1933. 1-4; 1933.
» — 1934. 2-3; 1934.

Krakow — Polska Academja Umiejetnosci.
Sprawozdanie komisyi fizyograficznej — Vol. LXVI, 1932.

Kyoto — Imperial University — College of Science and Engineering.
Acta scholae medicinalis — Vol. XVI, n. 2 a 4, 1934.
— » XVII, n. 1, 1934.

La Plata — Universidad Nacional.
— Anuario, 1933 34.

Le Caire — Institut d'Egypt.
— Tome XV, fasc. 2, 1933.

Leipzig — Furstliche Jablonowskische Gesellschaft.
Jahresbericht — 1932, may 1932.
— 1934, aug. 1934.

Monatshefte für mathematik und physik.
— Band XL, Heft 2, 1933.
— » XLI, » 1, 1934.

Leipzig — Akademie der Wissenschaften. - Mathematisch. - Physische Klasse.
Berichte — 85 Bd., III a V Hef. 1934
— 86. » 1 Heft. 1934.
Abhandlungen — XLII Bd.. II Heft. 1934

Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.
Bericht — Ueber die Tatigkeit. Jahre 1933.

Leningrad — Académie des Sciences de l' U. R. S. S.
Comptes-rendus; Series A — 1933; n. 8 e 9, 1933.
— 1934; n. 1 a 9. 1934.
— N. S., Vol. II, n. 1 a 9. 1934
— » » III, n. 1 a 7. 1934.

Bulletin Sc. Matem. e Natur.
— 1933; n. 7 a 10. 1933.
— 1934; n. 1 a 5. 1934.

Liège — R. Société des sciences.
Mémoires — S. 3. Vol. XIX, 1934.
Bulletin — 2. année, n. 8 a 10, 1934.
— 3 année, n. 1 a 7, 1934.

Société Géologique.
Annales — Tome 55°, 1934.
— » 56°, 1934.

Lille — Université.
Travaux et Memoires — Fasc. n. 5 1932

Liverpool — Biological Society.
Proceedings and Transactions — Vol. XLVII, 1933.

Livorno — R. Accademia Navale — Istituto elettrotecnico.
Pubblicazioni — N. 93 a 97, 1934.

Locarno — Società Ticinese di scienze naturali.
Bollettino — Anno XXVIII, 1933-34.

London — British Museum (Natural History)
Publications — Mineralogy Department, 1933.
» — Board of Educations, 1933-34.

Direzione del Periodico.
Nature — ...; 132; 3346 a 3353 e indice; 1932.
— ...: 133; 3354 a 3366 e indice; 1933.
— ...; 134; 3367 a 3394; 1934.

R. Society. — Proceedings. Ser. A (Mathem. and Phys. Sciences)
— Vol. 143, n. 848 a 852, 1933.
— » 144, n. 853. 1934.
— » 145, n. 854 e 55 1934
— » 146, n. 856 a 859 1934
— » 147, n. 860 e 861. 1934
Proceedings. Ser. B. (Biolog. Sciences).
— Vol. 114, n. 787 a 790, 1934.
— » 115, n. 791 a 795. 1934.
— » 116, n. 796 a 798, 1934
Philosophical Transactions. Ser. A.
— Vol. 233. n. 714 a 730, 1934.

London — Philosophical Transactions. Ser. B.
— Vol. 223, n. 492 a 508, 1933 34

Year Book — 1933.

R. Astronomical Society.
Monthly noticies — Vol. 94, n. 1 a 8, 1933-34.
Geophysical supplement — » 3°, n. 5 e 6, 1933-34.
General Index — » LXXI to XCI, 1911 a 1931-34.

Geological Society.
Quarterly Journal — Vol. XC, n. 357 a 359, 1934.

Geological literature.
— 1932, n. 35. 1933.

Linnean Society.
Journ. Botany — Vol. XLIX, n. 330 e 331, 1934.
» Zoology — » XXXVIII, 1934.

Mathematical Society.
Proceedings — Ser. 2ª, Vol. 36, n. 5 a 7, 1933-34.
— » » » 37, n. 1 a 7. 1934.
— » » » 38, n. 1 a 3. 1934.

Mineralogical Society — The Mineralogical Magazine and Journal
— Vol. XXIII, n. 143 a 146, 1933-34.

Board of Education. - The Sciences Museum - Handbooks.
Descriptive catalogue — Part. II, 1933.

Pamping Machinary Aereonautics.
— II, 1934.

Electrical engeneering collections.
— Anno 1933-1934.

Lund — Universitatis.
Acta — N. S., Vol. XXIX, n. 1 e 2. 1933.

Lwòw — Studia Mathematica.
— Tom. IV, 1933.

Madras — Indian Mathematical Society.
Journal — Vol. I, n. 4, 1933.
» N. S. — » I, n. 1 e 2, 1934.
» N. S. — » II, n. 1, 1934.

Madrid — R. Accademia de Ciencias exactas, fisica y naturales.
Revista de la R. Ac. de Ciencias — Tom. XXX, quad. IV, 1933.
— » XXXI, » I, 1934.

Sociedad Matemàtica Española.
Revista matem. Hispano-Americ. — Ser. II, tom. VIII, n. 3 a 10. 1934

Manchester — Literary and Philosophical Society.
Memoirs and Proceedings — Vol. 77, 1932-33.

University of Manchester Museum.
Publications — N. 104 e 105. 1933.

Marburg — Gesellschaft der Naturwissenschaft.
— Vol. 67, 1933.

Marseille — Université d'Aix. Faculté des Sciences.
— Ser. II, Vol. VI, fasc. II, 1932.
— » II, » VI, fasc. I, 1933,

Massachussetts — Institute of Technology Press.
Journal of Matem. and Physiks — Vol. XIII, n. 1 e 2, 1934

Messina — R. Accademia Peloritana.
Atti — » XXXV, 1934

Mexico — Sociedad cientifica Antonio Alzate.
Memorias y Revista — Vol. 51, n. 11 e 12, 1932.

Museo Nacion. de Arqueolog. Hist. y Etnogr.
Boletin — Ser. 5ª, Abril a Dicebre, 1933
Anales — » 4ª, Vol. VIII, n. 2 a 4, 1933.

Segreteria de relaciones exteriores.
Boletin oficial. Vol. LXI, n. 10, 1933.

Segreteria de Agricultura y Fomento.
Boletin — 1933, n. 2 e 3, 1933.

Universidad Nacional autonoma de Mexico. Istituto de Geologia.
Anuario — 1932 33.

Sociedad Mexicana de Geografia y Statistica.
Buletin — Tom. 43, n. 10 a 12, 1934
» — » 44, n. 3 e 4, 1934
Premier centenario de la Sociedad: 1833-1933; 1933.

Michigan — University Observatory.
Publications — Vol. V, n. 12, 1933.
— » VI, n. 1 a 5, 1934.

Milano — Associazione elettrotecnica italiana.
Atti — Vol. XX, n. 35, 36, e Ind., 1933.
» — » XXI, n. 1 a 5, 1934.

Unione nazionale fascista Industria elettrica.
L' Energia Elettrica — Vol. X, n. 12, 1933.
— » XI, n. 1 a 10, 1934.
Supplemento — » X, n. 12, 1933.
— » XI, n. 1 a 11, 1934.

Seminario matematico e fisico.
Rendiconti — Vol. VII, 1933.

R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
Rendiconti — Ser. II, Vol. LVI, fasc. 16 a 20, 1933.
— » » » LVIII, » 1 a 15, 1934.
Memorie — » III, » XXII, » 5, 1933.

R. Osservatorio di Brera.
Contributi — N. 15 a 24, 1932.

Soc. Italiana di scienze naturali e Museo civico di storia naturale.
Atti — Vol. LXXII, fasc. 3 e 4, 1933.
— » LXXIII, fasc. 1 e 2, 1934.

R. Scuola d'Ingegneria.
Annuario 1932-1933, 1934.

Università Cattolica del Sacro Cuore.
Pubblicazioni — Ser. 11.ª, Vol. I, 1935.

Fondazione Scientifica Cagnola.
Atti — Vol. XXIX, 1934.

Minneapolis — Wertern Surgical Association.
Transactions, 1933.

Minnesota — University.
Agricolt. Experim. Station. Bulletin — N. 295 a 300, 1932.
Geological Survey. Bulletin — » 2 a 4. 1933.
Department of Anatomy — Vol. 13, 1934.

Missouri — University Studies.
Quarterly Research — Vol. VIII, n. 1 a 3. 1933.
— » IX, n. 1 ... 1934.

Modena — R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.
Atti e Memorie — Ser. IV, Vol. IV, 1933-34.

Montevideo — Museo Nacional de Historia natural.
Anales — Serie II, tom. IV, n. 1 a 4. 1932-33

Moscou — Société des Naturalistes.
Bulletin — Section géologique — N. S., Tome XL, n. 1 a 4. 1932
— N. S., » XLI, n. 1 a 4. 1933
» biologique — N. S., » XLI, n. 1 a 4. 1932.

Appleed Mathematic and Meccanics.
— Vol. I, fasc. 1. 1933

Moskauer Staats - Universitat - Wissenschaftliche Berichte.
— Hef. I, 1933.

Société Mathématique - Recueil Mathématique.
— Tom. 41, n. 1 e 2, 1934.

München — Bayer. Akademie der Wissenschaften.
Abhandlungen, N. F, Hef. 17 e 25. 1933-34.
Sitzungsbericht, Hef. 1 a 3, 1933-34.
Jahrbuch, 1932-34. 1933

Napoli — Orto botanico.
— Bollettino, Tom. XII. 1933.
— Relazione, 1933.

Società italiana di Biologia sperimentale.
Bollettino — Vol. VIII, n. 9 a 12. 1933.
— » IX, n. 1 a 9. 1934.

R. Accademia Medico-Chirurgica.
Atti — Vol. LXXXVII, 1934.

Direzione del Periodico:
Rivista di fisica, matem. e Sc. nat. — Ser. II, Vol. VIII, n. 3 a 10. 1934.
— » » IX, n. 1, 1934.

Istituto Superiore navale.
Annali — Vol. II, fasc. II, 1933.
» III, » I, 1934.

R. Scuola d'Ingegneria.
Annuario — 1932-33. 1933.
— 1933-34. 1934.

Società italiana di Nipiologia.
La Nipiologia — Vol. XIX, n. 4, 1933.
— » XX, n. 1 e 2, 1934.

Stazione Zoologica,
Pubblicazioni — Vol. XIII, fasc. 2. 1933.
Bollettino — Anno LI, n. 1 a 4, 1933.
— » LII, n. 1 e 2, 1934.

Napoli — Società Italiana per il progresso delle scienze.
Programma della 23ª riunione, Ottobre 1934.

New Haven — Connecticut Academy of arts and sciences.
Memoirs — Vol. VIII, June-Sept. 1934.

New York — Academy of sciences.
Annals — Vol. XXXV, n. 1 e 2. 1933 e indice del Vol. 34.

American Mathematical Society.
Bulletin — Vol. XXXIX, n. 11 e 12, 1932.
— » XL, n. 1 a 10, e indice, 1934.
Transactions — » Vol. 36, n. 1 a 3, 1934.

Ohio — University. — Journal of sciences — Vol. XXXIII, n. 6, 1933.
» XXXIV, n. 1 a 5. 1934.

Ottawa — R. Society of Canada.
Proceedings and Transactions.
— Ser. 3ª; Vol. XXXVII, Sez. III, May 1933:
» » XXXVIII, » » » 1934

Padova — R. Università — Seminario Matematico.
Rendiconti — Anno IV, n. 3 e 4, 1933.
— » V, n. 1 e 2. 1934.
Acta Univers. patavinae sept. saecularia celebratis, 1922 1923.

R. Scuola d' Ingegneria.
Annali — II, II, agosto 1933

R. Accademia Scientif. Veneto Trent. Istriana.
— Ser. 3ª, Vol. XXIV, 1934.

Consiglio Nazionale delle ricerche.
Comitato geodetico — N. S., n. 1 a 8, 1931 a 33.

Palermo — Circolo matematico.
Rendiconti — Vol. LVIII, fasc. 1 e 2, 1934.

Società di Scienze Naturali ed Economiche.
Giornale — Vol. XXXVII e indice, 1934.
Bollettino — N. S., Vol. XV, 1934.

R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti.
Atti — Ser. 3ª, Vol. XVIII, fasc II e III, 1934.
Bollettino — N. S., Vol. XLVII, a XLIX, 1931 a '33.

Paris — Académie des sciences.
Comptes rendus hebdomadaires des séances.
— Tom. 197, n. 25, 26 e indice, 1934.
— » 198, n. 1 a 26, 1934.
— » 199, n. 1 a 26, 1934.
Bulletin Bibliograf., 1933.

Bureau des longitudes.
Annuaire 1935.

École normale supérieure.
Annales scientifiques — Ser. 3.ª, Tom. 51, fasc. 1 e 2, 1934.

Paris — École Polytechnique.
Journal — Ser. II, fasc. 31 e 32 1933 34

École pratique des Hautes Études à la Sorbonne.
Bulletin des sciences mathématiques.
— Serie 2.ª, Tome LVII, fasc. 12, 1933
— » » » LVIII, » 1 a 10, 1934.

Musée d'histoire naturelle.
Bulletin — Ser. 2.ª, Vol. V, fasc. 6, 1933.
— » » » VI, fasc. 1 a 4, 1934.

Société d'encouragement pour l'industrie nationale.
Bulletin — Vol. 132, n. 12, 1933.
— » 133, n. 1 a 9, 1934.

Société mathématique de France.
Bulletin — Vol. LXI, n. 3 e 4, 1933.
Comptes Rendus des Seances, Année 1933-34.

Société Française des Electriciens.
Bulletin — Ser. V, Tom. III, n. 36 a 40. 1934.
— » » » IV, n. 41 a 47 1934.

Bureau International des Beds et Mesures.
Travaux et Memoires — Tom. XIX, 1934.

Pavia — Società ligustica di Scienze e Lettere.
Atti — N. S., Vol. XII fasc. 4 1933.
— » XIII, fasc. 1 a 4, 1934.

Perm — Institut des recherches biologiques.
Bulletin — Vol. VIII, fasc. 6 a 10, 1933.
— » IX, fasc. 1 a 8, 1934.

Philadelphia — Academy of natural sciences.
Proceedings — Vol. LXXXV, 1934.

Wagner free Institute of sciences.
Bulletin — Vol. VIII, n. 4, 1933.

American philosophical Society for promoting useful knowledge.
Proceedings — Vol. LXXII, n. 5 e 6. 1933.
— » LXXIII, n. 1 a 5. 1934.
— » LXXIV, n. 1 a 3. 1934.
Transactions — N. S., Vol. XXIII, index part. I, 1934.
— » XXIV, » I, 1934.
The list, 1933.

Pisa — R. Scuola normale Superiore.
Annali. Scienze fis. e matemat. — Ser. II, Vol. III, fasc. 1 a 4, 1934.

Società toscana di scienze naturali.
Memorie — Vol. XLIII, 1933
Processi verbali delle adunanze — » XLII, n. 1 a 5, 1933.

R. Scuola d'Ingegneria.
Pubblicazioni — Ser. 5.ª, n. 222 a 237, 1933-34.

Portici — R. Istituto Superiore Agrario.
Annali — Serie 3ª, Vol. VI, 1934.

Postumia — Istituto italiano di speleologia.
Le Grotte d'Italia — Anno VIII, n. 1 a 4. 1934.

Prag — Société Royale des Sciences de Boheme.
Memoires — Vol. 1932-1933.
Comptes Rendus — » 1932 1933.

Societas scientiarum Bohemica.
Collection-Chemical comunications — Vol. IV, n. 11 e 12. 1933.
— » V, n. 1 a 10. 1934.

Académie Theque des Sciences.
Bulletin international — Tom. XXX, III année, 1932.

Ceske Akademie ved a Umeni.
Rozpravy — Trida II, Rocnik XLII, 1933.
Vestnik-Roenik — XLI, 1932.
Staroceska knihovina — Vol. IV, 1933.
Anthropologica — II, 1933.
Almanach-Rocnik — XLI, 1931.

Quesland — Quesland Museum.
Memoires — Vol. X, parte IV, 1934.

Rio de Janeiro — Jardino Botanico, e Institut de Biologia vegetale.
Archivos — Vol. I, n. 1, 1934.

Ministerio de Agricultura.
Boletin — Anno 23, n. 1 a 3, 1934.

Bibliotheca Nacional.
Annales — Vol. XLIV, n. 4, 1931.
— » XLV, 1931.

Institut historico e geografico.
Revista — Vol. 164, 1933.
Volume speciale — 1933.

Roma — Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei.
Scient. nuncius radiophonicus — 1933. n. 25 a 29 1933.
— 1934. n. 28 a 33 1934.
Acta — Vol. LXXXVII - Sess. 1 a 6. 1933-34.
Memorie — Ser. III, Vol. I, pag. 1 a 48, 1933.
Annuario — 1933 1934.

R. Accademia dei Lincei.
Memorie della Cl. di sc. fis., mat. e nat.
— Ser. VI, Vol. V, n. 7 a 10. 1933 34
Rendiconti — » VI, » XVIII, n. 9 a 12. 1933
— » » » XIX, n. 1 a 12 1934.
— » » » XX, n. 1 a 6, 1934.
Annuario — 1934.

Comitato d'artiglieria e genio.
Rivista d'artiglieria e genio — Vol. LXXXII, n. 12. e indice 1933.
— » LXXXIII, n. 1 a 9. 1934

R. Accademia d'Italia. Cl. di Sc. fis., mat. e nat.
Memorie — Vol. IV, n. 1 a 20, 1933.
Annuario — » V, 1932-33 e 34.

Accademie e Biblioteche d'Italia.
Annali — Vol. VII, n. 2 a 6, 1933.
— » VIII, n. 1 e 2, 1934.

Roma — Biblioteca Nazionale Centrale Vittorio Emanuele.
Bollettino delle opere moderne straniere.
— Anno 1932, Ser. VI, n. 23380 a 25284. 1933.
Ministero dell'Educazione Nazionale.
Mostra delle Biblioteche italiane, 1934.
Consiglio nazionale delle ricerche
— Anno V, Vol. I, n. 9 e 10. 1934.
Ministero dell'Agricoltura e Foreste.
R. Ufficio Centrale di Meteorologia e Geofisica:
Memorie — Ser. III, Vol. IV, 1334.
Annali — » » Osservazioni, 1933 34
Ministero dei Lavori Pubblici.
Annali — Vol LXXI, n. 8 a 12, 1933.
— » LXXII, n. 1 a 6 1934.
Servizio idrografico (Pubblicazioni) — N. 14, Vol. VII, 1934
— » 132 e 133, 1934.
— » 10 e 11, Vol. IX, 1934.
Elenco delle pubblicazioni a tutto il 31 agosto 1934.
Ministero delle Corporazioni — R. Ufficio geologico.
Bollettino — Vol. LVIII, n. 1 a 12; 1933.
— » LIX, n. 1 e 2; 1934
Ministero dell'Aeronautica — Ufficio Presagi.
Sondaggi aerologici — N. 22 a 24, 1934.
Riassunto mensile — » 11 e 12 1934.
Direzione del Periodico:
Il Calore — Vol. VI, n. 12, 1933.
— » VII, n. 1 a 10. 1934.
Periodico di mineralogia. — Vol. IV, n. 1 a 3, 1933.
Croce rossa italiana.
Pubblicazioni — Vol. VIII, n. 9 a 12; 1933.
Società delle Nazioni.
Kivista Intern del Cinema educ. — 1933; n. 12, 1933.
— 1934; n. 1 a 11, 1934.
Ministero della Guerra. Comando del Corpo di Stato Maggiore.
Pubblicazioni edite dall'Ufficio storico — 1.° Sett. 1933.

Rochester - Physica — Vol. I, n. 1 a 11, 1933-34.

Rostok — Naturforscenden Gesellschaft.
Frende der Naturgeschichte in Mecklenburg, N. F. Bd., 7 e 8, 1933.

San Diego — Society of natural History.
Transactions — Vol. VII, n. 24 a 29 1933.

San Francisco (Calif.) — Academy of Sciences.
Proceedings — Vol. XXI, n. 1 a 10, 1933.

Sapporo (Giappone) — Hokkaido Imper. Univers., Faculty of sciences.
Journal — Ser. I: Mathematics. Vol. II, n. 1 e 2, 1934.
— » IV: Geology and Mineralogy. Vol. II, n. 1 e 3: 1934.

Sendai (Giappone) — Tohoku imperial University.
Mathematical Journal — Vol. 38, 1933.
— » 39, 1934.
Science Report — » 22. 1933.
— » 23, n. 1 a 3, 1934.
» » Geologie — Ser. 2.^{a}, Vol. XVI, n. 1 e 2, 1934.

Shanghai — Science Institut.
Journal — Sect. I — Depart. of Pharmaceutical - Vol. I, n. 1 e 2, 1933.
— » II — » of Geology - Vol. I, n. 1 a 5, 1933.
— » III — » of Biology-Bacter. - Vol. I, n. 1 a 4. 1934.
— » IV — » of Pathology - Vol. I, n. 8 e 9, 1934.

Siena — R. Accademia dei Fisiocritici.
Atti — Ser. XI, Vol. I, n. 4, 1933.
— » » II, n. 1 a 4. 1934.

St. Louis — Academy of Sciences.
Transactions — Vol. XXVIII, n. 1 a 4. 1934.

Stockholm — K. Svenska Vetenskaps-Akademien.
Archiv for Botanik — Vol. 25, n. 4, 1934.
— » 26, n. 1 a 3. 1934.
» » Kemie, Mineral., och Geol. — » 11, 3 e 4. 1934.
» » Matem., Astron. och Fysik — » 24, 1 a 5, 1934.
» » Zoologi — » 25, 4. 1934.
— » 26, 1 a 5, 1934.
Arsbok — » 1934; 1934.
Handlingar — Ser. 3.a, 12, 5 e 6, 1933.
— » 13, 1 a 6, 1934.
Strifter i naturskyddsärenden — N. 25, 1934.

Meteorologisk-hydrografiska Anstalt.
Arsbok — 13, 1933-1934.

Sveriges offentliga Bibliotek.
Accession-katalog — Register, 1916-1925. L. O. - 1933.

Le Prix Nobel en 1932-1934.
Ericsson Review — 1933, N. 3 e 4, 1933.
» ..... — 1934, » 1 a 3, 1934.
» Technics — 1933, » 1 a 6, 1933.
» » — 1934, » 1 a 4, 1934.

Stuttgart — Verein für vaterländische Naturkunde.
Jahreshefte — N. 89, 1933.

Sydney — Australian Museum of New South Wales.
Legislative Assembly — 1933; June-Nov., 1934.
Record Report — Vol. XVIII, n. 10, 1933.
— « XIX, n. 2 e 3 1934.

Royal Society of New South Wales.
Journal and Proceedings — Vol. XVII, n. 2. 1933.
— » XVIII, n. 1, 1934.

Australian national research council.
Sciences abstracts — Vol. 12, n. 4, 1933.
— » 13, n. 1 a 3 1934.

University Reprints.
Publicazioni — Ser. III — Chemistr. organic and inorganic.
— Vol. I, n. 62 a 73, 1932.
» VI — Geology and Geography.
— Vol. II, n. 1 a 5, 1933.
» XI — Phys.., Mathem., Astronomy.
— Vol. I, n. 26 a 38, 1933.
» XIII — Zoology — Vol. II, n. 1 a 6, 1933.

Szeged — Universitatis hungaricae Franc. Joseph.
Acta Scientiarum mathematicarum — Vol. VI, n. 4, 1934.
— » VII, n. 1 e 2, 1934.

Tacubaya — Osservatorio Central. Servicio Meteorologico Mexicano.
Boletin — 1933. n. 4 a 6. 1914.
» — Octobre-Dicembre 1933.
» — Enero a Junio 1934.

Tartu — Naturforschende Gesellschaft.
Sitzungsberichte — Vol. XXXIX, n. 3 e 4, 1933.
— » XL, n. 1 a 4. 1934

Archiv für die Naturkunde Estlands.
Geologica, Chemica et Physica — Ser. I, Vol. 10, part. 4ª, 1934

Taschkent — Universitas Asiae Mediae.
Acta — Ser. V. - Matematica. - Fasc. 1 a 10. 1929 1933.
» — » VI. - Chemia. - Fasc. 1 a 6. 1928-1933
Catalogo delle pubblicazioni, n. 1. 1930

Tokio — National Research Council of Japan.
Report — Vol. II, n. 2. 1934.
— » III, » 3 e ind. 1934.
Report of radio researches — » IV, » 1 e 2 1934.
Journal of physics trans. — Abstr. — » IX, » 1, 1934.
Japanese Journal of math. — » X. » 2 a 4 1934.
» » Physic — » XI, » 1. 1934.
» » of Astr. et Geophys. — » IX, » 2, 1933.
Journal of Engineering (Abstracts) — » X, indice 1934
— » X e XI, n. 1 a 3, 1934.

Institut of physical chemical research.
Scientific Papers — . . . ; Vol. 23 a 25 ; n. 480 a 534. 1934.

Tohoku Imperial University.
Faculty of Sciences: Mat., Astr., Phy., Chem.
— Vol. II, part. 9 e 10. 1933.

Tokyo Burnika Daigaku.
Science report — Vol. I, n. 19 a 129. 1934.
— » II, n. 30 a 35. 1934

Imperial Academy — Proceedings — Vol. IX, n. 8 a 10, 1933.
— » X, n. 1 a 7, 1934

Physico-mathematical Society.
Proceedings — Ser. 3.ª, Vol. 15, n. 12, 1933.
» » 16, n. 1 a 11. 1934.

Torino — R. Accademia delle scienze.
Atti — Vol. 69, Disp. 1 a 3. 1934.
Annuario — Anno accademico 1933-34, 1933.

Toronto — The Royal Astronomical Society of Canada.
Journal — Vol. XVII, n. 9 e 10, 1933.
» XVIII, n. 1 a 8, 1934.

Toulouse — Université.
Annales de la Faculté des sciences — Ser. III, Tom. XXV, 1933.
Annuaire, 1934.

Trichinopoli — Indian Mathematical Society.
Journal — Vol. XX, 1934.

Trieste — R. Osservatorio astronomico.
Annuario 1933 34.
Pubblicazioni — Vol. I, n. 2, 1934.

Istituto italiano di Speleologia.
Memorie — Serie Biologica, III, 1933.

Congresso Speleologico Nazionale.
Atti — 10 a 14. Giugno 1933.

R. Scuola d'Ingegneria di Padova (Politecnico delle Venezie).
Comunicazioni e Memorie, 1933.

Upsala — Vetenskaps-Societeten (Societas scient. Upsaliensis).
Nova Acta — Serie 4.ª, Vol. IX, fasc. 1.º.

Universitet. — Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique — Vol. LXV, 1934.

Föreläsnigar och Ovningar vid Kungl. Universitatet. — 1933 34

Geological Institution.
Bulletin — Vol. XXIV, 1933.

Arsskift. — Bd. 1 a 3, 1933

Utrecht — Observatoire.
Ergebnisse aerologis. beobachtun. — Vol. 21 1932-33.

Venezia — R. Istituto veneto di scienze, lettere ed arti.
Atti — Anno XCIII, disp. I a IX, 1933 34.

R. Comitato talassografico italiano.
Memorie — N. 207 a 214, 1934.

Verona — Accademia di Agric., Scienze, Lettere, Arti e Commercio.
Atti e Memorie — Vol. XI, 1934.

Vladivostok — Far East Geophysical Institute.
N. II (IX), 1931-32.

Warsovie — Société Politechnique.
Acta Biologicae Experimentalis — Vol. VII, 1931 32.

Washington — National Academy of Sciences.
Proceedings — Vol. 19, n. 12, 1933.
— » 20, n. 1 a 10, 1934.

Smithsonian Institution.
Annual report of the Board of Regents — 1932 1933.
Smithsonian Miscellaneous Collections.
— Vol. 87, n. 18 a 20, 1933.
— » 88, indice 1934.
— » 89, n. 6 a 15, 1933.
— » 90, compl. 1934.
— » 91, n. 1 a 15. 1934.
— » 92, n. 4, 1934.
Smithsonian Report. Public. — 1932, pag. 141 a 192, 1932.

Washington — U. S. geological Survey (Department of the Interior).
Bulletin — N. 842 a 858; 1933 34.
Professional Papers — » 175 D, 1934
Water Supply and Irrigation Papers — » 1931; 726 a 739; 1934
Circolari — » 1 a 9, 1933 34
National Museum — Report 1933.

Wien — Akademie der Wissenschaften.
Sitzungsberichte. Math. nat. Cl., Abth. I — Vol. 142, n. 1 a 4 1933.
— » 143, n. 1 a 4 1934.
Abth. II a — » 142, n. 1 a 10 1933.
— » 143, n. 1 a 7. 1934
Abth. II b — » 142, n. 1 a 10. 1933.
— » 143, n. 1 a 4 1934.
Denkschriften — 103 Bd., 1934.

Zoologisch-botanische Gesellschaft.
Verhandlungen — Vol. LXXXIII, heft 3 e 4; 1934

Zentralanstalt für Meteorologic und geodinamik - Jahrbucher.
N. F., LXV e LXVI Bd., 1933.

Winterthur — Naturwisserschaftlichen Gesellschaft — 1931-32.

Zaragoza — Universidad. Facultad de Ciencias.
Seccion de Ciencias — Vol. II, fasc. 3 e 4 1933.
Academia de Ciencias.
Revista — Tom. XVI e XVII, 1933.
Memoria — 3.ª, 1934.

Zürich — Naturforschende Gesellschaft.
Vierteljahrschrift — Vol. 78, n. 1 a 4, 1933.
Denkschriften — » LXIX, n. 1, 1934.

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o dagli editori dal 1. gennaio al 31 dicembre 1934.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Addink N. W. H., Chemisch en physisch zuivere stoffen loodoxyde de beteekenis der grensvlakspanning bij pyknometrische bepalingen — Utrecht, 1933.
2. Ameghino Fl., Ungulados, aves y desdentados, vol. XI — La Plata, 1920.
   » » Primera sinopsis geológicopaleontológica, vol. XII — La Plata, 1921.
3. Amodeo F., Maggiore luce sullo sviluppo della Prospettiva in Francia nel secolo XVII — Pavia, 1934.
4. Araldo G. B., Quel brano dell' Astronomia che più da vicino riguarda il nostro pianeta — La Spezia, 1933.
5. Baart W. K., Eenwaardige reguliere functies — Haarlem, 1933.
6. Barto G. B., Economie en technick van codes en code-condensoors — Zutphen, 1933.
7. Belinfante A. H., Autoxydatie en Zuurstof-activeering — Amsterdam, 1933.
8. Birzer F., Geologische Untersuchungen zwischen Berilngries und Thalmässing — Erlangen, 1933.
9. Boekenoogen H. A., Koolstofringen met 8, 15 en 30 ringatomen — Amsterdam, 1930.
10. Beekhorst L. C. J., De vermeende allotropie van vloeibaar nitrobenzol — Utrecht, 1933.
11. Bakker Schut F., Industrie en Woningbouw — Assen, 1933.
12. Bosch W., Een experimenteele toetsing van de theorie van Debye-Hückel — Utrecht, 1931.
13. Bouma T., Intensiteitsmetingen in het nikkel-en cobaltspectrum — Utrecht, 1930.
14. Bouwman H. P., Intensiteitsmeting in het heliumspectrum eener gecondenseerde ontlading — Utrecht, 1933.
15. Braek J. O. M., The Santa Clara Valley, California, A study in landscape changes — Utrecht, 1932.
16. Buning W. L., De Geologie van den Cimone di Margno en den monte di Muggio — Leiden, 1932.

17. Brinkman H. C., Zur quantenmechanik der multipolstrahlung — Groningen, 1932.
18. Brunelli P. E., Le macchine a vapore, con 281 figure nel testo — Torino, 1934.
19. Burgers W. A. M., Radiale randlimieten van holomorfe functies — Nijmegen, 1929.
20. Campagne C., Iteratie van Rationale Functies — Amsterdam, 1929.
21. Casaccio E., Ali nel sogno (terza edizione) — Caltanissetta, 1933.
22. Chytil Karel, Antonin Podlaha — Praze, 1933.
23. Crommelin R. D., La géologie de la Valsassina et de la région adiacente au nord — Leiden, 1932.
24. Custers J. F. H., Foto-elektriese intensiteitsmetingen in het Kwikspektrum — Utrecht, 1931.
25. De Blasi D., 1.° Le pietre miliari della Immunologia. Discorso inaugurale del III Convegno Volta. 2.° Commiato ai convenuti, alla chiusura del Convegno — Roma, 1933.
26. De Kock A. C., Untersuchungen über den lichtwechsel von langperiodischen veränderlichen sternen — Zutphen, 1933.
27. De Monchy M. M., Nitratie van Meta-chloor-en-Broom-aniline-derivaten — Gravenhage, 1932.
28. Desio A., Schizzo geologico della Libia alla scala di 1: 4000000 — Firenze, 1933.
29. De Vries C. L., Eenige onderzoekingen over absorptie en osmose — Leiden, 1932.
30. Du Pui J. C., Loopbaan van de Komeet Wolf (1916 b = 1917 III) — Hoenderloo, 1932.
31. Engelfriet J., Topologische egenschappen en differentiaal-invarianten van krommen-en oppervlakken scharen — Leiden, 1933.
32. Engelhard E., Mechanismus und Ursprung der Dunkelleitung und der lichtelektrischen Leitung in kupferoxydul — Leipzig, 1933.
33. Goldbacher A., L' industria elettrica nella economia generale — Milano, 1933.
34. Gossel E., Messungen an Ultrakurzwellenröhren — Leipzig, 1932.
35. Grossi M., La levitazione elettromagnetica — Roma, 1934.
36. Haantjes J., Het beweeglijk assenstelsel in de offiene ruimte — Leiden, 1933.
37. Half H., Ueber die Einwirkung von Schwefelkohlenftoff und Aetzkali auf p-Methylcyclohexanon — Erlangen, 1933.
38. Hitz Fr., Über Alkylperoxyde — Erlangen, 1930.
39. Hoekstra J., Convexe functies — Utrecht, 1927.
40. Ivaldi G., Sulla dipendenza dell' energia dei fluidi dalla loro natura — Milano, 1933.

41. Janssen L. W., Electrische grensulak-verschijnselen aan glas - Amsterdam, 1933.
42. Karel Domin, Jan Vilhelm — Praze, 1932.
43. Kawaguchi Akitsugu, Die Differentialgeometrie in der verallgemeinerten Mannigfaltigkeit — Palermo, 1932.
44. Keyfer F., Ueber neue Derivate der Barbiturfäure — Erlangen, 1933.
45. Koolhaas D. R., Bijdrage tot de kennis der bicyclische sesquiterpenen eudesmol, machilol ed selineen gedeeltelijke synthese van β-Thujon — Purmerend, 1928.
46. Kröhnert Frl. A., Quantitative und qualitative schnellbestimmungen von Legierungsbestandteilen mittels eines neuen spektrallinienphotometers — Leipzig, 1932.
47. Kuiper P. F., De groene straal — Helder, 1926.
48. Kuiper G. P., Statistische onderzoekingen van Dubbelsterren — Leiden 1933.
49. Lanzing J. C., Over de osmose in enkele binaire osmotische stelsels — Leiden, 1933.
50. Larussa D., I problemi igienico-sociali di Catanzaro e le condizioni finanziarie del Comune — Catanzaro, 1932.
51. Larussa D., La Città di Catanzaro ed il piano regolatore. Studî e condizioni generali — Catanzaro, 1932.
52. Leonardo da Vinci, Scritti di E. Carusi, G. Favaro, G. Gentile, R. Marcolongo e A. Venturi — Roma, 1934.
53. Luyckx P. Th., Bepaling van het werkzame bestanddeel in eenige sterkwerkende geneesmiddelen — Leiden, 1932.
54. Mahla K., Ein Bandenspektrum des SrO im nahen Ultrarot — Berlin, 1933.
55. Marzolo F., I serbatoi di piena — Milano, 1933.
56. Marzolo F., Il concetto di probabilità nelle espressioni delle portate caratteristiche e di piena — Padova, 1933.
57. Maximilian E. F., Meting der overgangswaarschijnlijkheid 2p-1s voor natrium door absoluteintensiteitsmetingen aan vlammen — Utrecht, 1932.
58. Meijer Th. M., Over verbindingen uit den Wortelstengel van den Platdoorn (Arctopus echinatus) — Leiden, 1933.
59. Müller F. M., On the metabolism of the purple sulphur bacteria in organic media — Berlin, 1933.
60. Nieuwenkamp W., De structuurtypen van loodbromide en loodfluobromide en het structuurschema der dihalogeniden — Amsterdam, 1932.
61. Nilsson G., Das Haupttheorem der Chemie — Stockholm, 1933.
62. Nomitsu Takaharu, On the Density Current in the Ocean — Kyoto, 1933.
63. Nomitsu Takaharu and Takegami Tohichiro, On the Density Current in the Ocean — Kyoto, 1933.

64. Oosterhoff P. Th., Effectieve golflengten en photographische magnituden van Sterren in h. en x Persei — Leiden, 1933.
65. Otten G., Onderzoekingen betreffende de theorie van den townendring — Delft, 1932.
66. Parijs J. P., Bijdrage tot de kennis van de oost. Indische Damarhars — Leiden, 1933.
67. Pfeiffer H., Uber die Konstitution des 4,4' — Chinons des Dinaphthylendioxydes — Willibaldsburg, 1933.
68. Pijpers P. J., Geology and Paleontology of Bonaire (D. W. I.) — Utrecht, 1933.
69. Povenz F., Die Absorption dampfförmiger organischer Moleküle im Ultraviolett und Schumanngebiet — Leipzig, 1933.
70. Pugno Vanoni E., Applicazioni radiologiche dei tubi ionici ed elettronici — Milano, 1932.
71. Pugno Vanoni E. - De Fassi G., Wattmetro elettrostatico per misure di potenza ad alta tensione — Milano, 1933.
72. Raadsveld Chr. W., Nitro-en Broom-nitro-derivaten van Para-amino-acetophenon — Leiden, 1932.
73. Reestman B. M., Inleiding tot de theorie der klassennlichamen — Amsterdam, 1933.
74. Rekveld J., Intensity problems connected with the Ramaneffect — Utrecht, 1931.
75. Revessi G., Ioni ed elettroni: Nuovi orizzonti nella tecnica delle correnti intense — Milano, 1932.
76. Rhomberg R., Zahngestalt u. Zahnentwicklung untersucht am Gebits des Hausschweines — Berlin, 1932.
77. Ruggiero C., Sul calcolo d' economia delle reti di distribuzione urbana — Roma, 1933.
78. Ruggiero C., Ultimi progressi nella depurazione delle acque di rifiuto urbane — Milano, 1933.
79. Ruinen J., Life-cycle and environment of *Lochmiopsis sibirica* Woron — Leiden, 1933.
80. Russo G., Sommario cronologico e indice per materie pelle leggi, decreti e altri atti — Roma, 1933.
81. Sacco F., L' origine del petrolio — Torino, 1929.
82. Sahm A. W., Bau und Wachstum des Deckels (operculum) der Kiemenschnecken — Berlin, 1932.
83. San Juan Llosa R., Sumacion de series de Radio nulo y prolongacion semianalitica — Madrid, 1933.
84. Savagnone R, Studî sul controllo magnetico dell' arco a mercurio e sulla trasformazione statica della corrente continua in alternata — Milano, 1932.

85. Schlingemann J., Het voorkomen en beslechten van ärbeidsgeschillen — Denhaag, 1933.
86. Schmidt K., Zur Kenntnis der periglazialen Ablagerungen in Mittelfranken — Nürnberg-Zirndorf, 1933.
87. Schönwald E., Ein Verfahren zur Messung lichtelektrischer Ströme in Halbleitern — Leipzig, 1932.
88. Schouten J. P., Over de grondslagen van de operatoren-rekening volgens heaviside — Delft, 1933.
89. Schulz K., Das Verhalten der Thio-Harnfstoffe gegenüber Diazonium Salzen — Erlangen, 1933.
90. Seeberger M., Dispersionsuntersuchungen mit ungedämpften Ultrakurzwellen — Leipzig, 1932.
91. Someda G. e De Fassi G., Qualche osservazione sui gruppi motori-raddrizzatori — Milano, 1932.
92. Stabilini L., Deformazioni e tensioni nei fili elastici inflessi e tesi — Roma, 1932.
93. Stanek V. J., K Topografiché a srovnàvaci anatomii sluchového orgánu nasich Chiropter — Praze, 1933.
94. Stefanini G., Saggio di una carta geologica dell' Eritrea, della Somalia e dell' Etiopia alla scala di 1: 2000000 — Firenze, 1933.
95. Svabensky Lad, Vápencovy ostruvek u Milatic sev. od Mor. Budejovic — Brne, 1933.
96. Tonkes P. R., Recherches sur les poils urticants des chenilles — Utrecht, 1933.
97. Tullenero A. J., Het gebruik van aethyleen en homologen in de chemische technick — Delft, 1933.
98. Vàclav Stepàn, Vincent D' Indy — Praze, 1933.
99. Van Alphen P. M., Enkele magnetische Eigenschappen der metalen bij Lage Temperatuur — Leiden, 1933.
100. van Berckel F. W., Onderzoekingen over de circulatie in het koelsysteem van de vuurhaardwanden van een stoomketel — Deventer, 1933.
101. Van Dalen E., Oriënteerende onderzoekingen over tandcementen — Assen, 1933.
102. van Dam A. J., Die Chirostylidae der Siboga-expedition — Leiden, 1933.
103. van Der Dussen A. A., Stofontploffingen — Rotterdam, 1933.
104. Van der Neut A., De elastische stabiliteit van den dunwandigen Bol — Amsterdam, 1932.
105. van Der Neut D. N., Limitaties en sommaties — Amsterdam, 1933.
106. van Der Wal M. J., Reacties tusschen brandbare gassen en stikstofoxyden — Leiden, 1933.
107. van Ewijk L. G., Het verband tusschen het onderwerp, het negatief en

het positief en methoden tot het vorkrijgen van secundaire beelden in de photografie — Amsterdam, 1932.

108. van Gruting C. J., Duale differentiaalmeetkunde — Leiden, 1933.

109. Van Harpen N. H., The electrometric determination of the hydrogen ion concentration in the latex of Hevex brasiliensis and its applicability to technical problems — Medan, 1933.

110. Van Haselen A., Asymptotische ontwikkeling van holomorfe functies in een halfvlak — Groningen, 1929.

111. Vlugter J. C., Oxer de chemische samenstelling van hoogmoleculaire minerale oliën — Delft, 1932.

112. Weber W., Über Arylverkettung bei der Katalytischen Hydrierung von Arylhalogeniden — Erlangen, 1933.

113. Westermann J. H, The geology of Aruba — Utrecht, 1932.

114. Wildschut A. J., Metingen het electrisch moment van eenige cis-trans isomeren in verband met de configuratiebepaling van oliezuur en elaidinezuur — Oostburg, 1932.

115. Zambonini F., In memoriam — Napoli, 1934.

116. Zapletàlek J., « Vodní Kvët » a plankton na Lednicku v letech 1930 a 1931 — Brne, 1932.

117. Zehlein F., Irreduzibilitätsproblem bei ganzzahligen Potenzreihen — Erlangen, 1933.

INDICE DEL VOLUME

INDICE

Redattore responsabile ai termini di legge: prof. U. PIERANTONI